典型羣的几何学

J. 狄多涅著

科学出版社

統一书号：13031·1387
定　价：　0.66 元

典型羣的几何学

J. 狄多涅著

万哲先譯

科学出版社

1960

J. DIEUDONNÉ

LA GÉOMÉTRIE DES GROUPES CLASSIQUES

SPRINGER-VERLAG

1955

內 容 簡 介

本书主要包括任意体上的典型羣的构造，典型羣的自同构及同构，以及矩陣几何学三方面的內容，特别是近十几年来这些方面的成果．书中对这三部分的結果叙述比較完备，而且对主要結果都給出完全的或至少是綱領性的証明．书末附有較詳細的参考文献．本书对于想了解这方面成果的数学工作者是方便的，对于从事这方面研究的数学工作者更是有帮助的．

典 型 羣 的 几 何 学

J. 狄 多 涅 著

万 哲 先 譯

※

科 学 出 版 社 出 版 （北京朝阳門大街 117 号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

※

1960 年 7 月第 一 版	书号：2227 字数：116,000
1960 年 7 月第一次印刷	开本：787×1092 1/27
(京) 00001—11,500	印张：5 1/3

定价：0.66 元

序　　言

本书所闡述的理論中絕大部分是过去本丛书[1]中出版过的范德威尔登(B. L. van der Waerden)：綫性变换羣(Gruppen von Linearen Transformationen)一书第一部分所討論的对象。二十年来在这方面所发表的論文之多反映了这个理論的領域之广，而这些論文又在很多方面使已往研究这些問題的观点趋于融合。另一方面，在我們所指出的范围里，給出目前已經得到的比上书中更为完整的証明似乎是不成問題了，至少由此指明一些原則常是可能的。

在綫性变换羣中，本书只考慮到所謂"典型羣"[2]，而所研究的問題只是羣論中的"初等"部分，即主要圍繞子羣和同态这两个概念的那一部分。这个理論牽涉到比較复杂的概念的那些部分，例如这些羣的綫性表示論或它們的拓扑或微分几何的研究，并不包括在本书中；在証明中牽涉到的唯一常用工具几乎就是綫性代数，但卻是在几何語言和概念的強烈影响下綫性代数所采取的形式。

J. 狄多涅

爱范斯頓，1954年10月1日。

---

1) 指"Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete"(数学及其边緣部門的結果)丛书——譯者注.

2) 关于不包括在本书范围内的"例外"羣方面近来的重要工作，可以参考富莱登塔尔(H. Freudenthal)[1,2,8]，梯茨(J. Tits)[9]及薛佛侶(C. Chevalley)[3,4,5]。

目 录

第一章　直射变换与对射变换

§1. 綫性映射与半綫性映射

我們假定讀者已經熟知綫性代数的基本概念与一些初等結果(例如,見布巴基(N. Bourbaki)[1];我們采用这本书的符号). 除非另有声明,我們永远把向量空間了解为(交换的或非交换的)体[1] K上有限維的右向量空間 E.

設K和K'是两个体,而σ是从K到K'之上的一个同构映射;設E是K上的向量空間,F是K'上的向量空間. 从E到F之中的一个对于同构σ的半綫性映射是由E到F之中的一个映射而具有性質

$$u(x+y)=u(x)+u(y) \qquad \text{对于 } x\in E,\ y\in E,$$
$$u(x\lambda)=u(x)\lambda^{\sigma} \qquad \text{对于 } x\in E,\ \lambda\in K.$$

E的一个子空間在u之下的象是F的一个子空間; F的一个子空間在u之下的反象是E的一个子空間. u的秩定义为$u(E)$的維数,它也等于u的核$u^{-1}(0)$的反維数.

設K''是第三个体,τ是从K'到K''之上的一个同构映射;設G是K''上的一个向量空間,v是从F到G之中的一个对于同构τ的半綫性映射,那么 $w=vu$就是从E到G之中的一个对于从K到K''之上的同构$\sigma\tau$的半綫性映射. 如果u是从E到F之上的一个一一映射,u^{-1}就是从F到E之上的一个对于同构σ^{-1}的半綫性映射.

如果$K'=K$,那么从E到F之中的綫性映射只不过是一个对于K的单位自同构的半綫性映射.

---

1) 我們約定,体中的乘法不一定交換. 如果体中的乘法滿足交換律,我們就説这个体是域. 如果一个体不是域,那么它的乘法一定不可換——譯者注.

設 $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 E 的一組基，从 E 到 F 之中的一个半綫性映射 u 只要給了同构 σ 和 F 中的元素 $z_i=u(a_i)$ 就完全确定了. 实际上，对于 $x=\sum_{i=1}^{n}a_i\xi_i$，我們有 $u(x)=\sum_{i=1}^{n}z_i\xi_i^{\sigma}$. 如果 $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ 是 F 的一組基，而 $z_i=u(a_i)=\sum_{j=1}^{m}b_j\alpha_{ji}$，那么映射 u 由 m 行 n 列的矩陣 $A=(\alpha_{ij})$ 所确定，我們把这个矩陣称为 u 对于基 (a_i) 和 (b_j) 的矩陣. 如果 u 是从 E 到 F 之上的一个一一映射(当 $m=n$ 时)，那么 u^{-1} 对于基 (b_j) 和 (a_i) 的矩陣就是 $(A^{-1})^{\sigma^{-1}}$. 如果 v 是从 F 到 G 之中的一个对于同构 τ 的半綫性映射，而 B 为 v 对于 F 的基 (b_j) 和 G 的基 (c_k) 的矩陣，那么 vu 对于基 (a_i) 和 (c_k) 的矩陣就是 $B\cdot A^{\tau}$.

我們把从体 K 上的向量空間 E 到它自身之上的一个半綫性映射称为 E 的**直射变換**. E 的一切直射变換組成一羣，显然 K 上两个同一維数的向量空間的直射变換羣同构. 于是我們用 $\Gamma L_n(K)$ 表 K 上选定的一个 n 維向量空間 E (例如 K^n 就可以看作 K 上的一个右向量空間)的直射变換羣.

对于 K 中的一切 $\alpha\neq 0$，映射 $x\to x\alpha$ 是一个对于 K 的內自同构 $\xi\to\alpha^{-1}\xi\alpha$ 的直射变換 h_α；我們把 h_α 称为对于 α 的**位似变換**. 一切位似变換組成 $\Gamma L_n(K)$ 的一个正規子羣 H_n，而 $\alpha\to h_\alpha$ 是从体 K 的乘法羣 K^* 到羣 H_n 之上的一个**反同构**. 位似变換可以刻划作将 E 中維数 k 的一切子空間都保持不变的直射变換 (对于任意一个 k 的值，$1\leqslant k\leqslant n$).

E 的直射变換中的那些**綫性映射**[1]組成 $\Gamma L_n(K)$ 的一个正規子羣 $GL_n(K)$，称为体 K 上 n **个变数的一般綫性羣**；而它同构于体 K 上 n 級可逆矩陣所組成的乘法羣. 子羣 H_n 和 $GL_n(K)$ 在 $\Gamma L_n(K)$ 中互为**中心化子**(見第二章 § 1)，它們的交 Z_n 是它們的公

1) 我們也把从 E 到 F (同一体 K 上的向量空間) 之上的一一綫性映射称为从 E 到 F 之上的一个同构，那么 $GL_n(K)$ 的元素就是向量空間 K^n 的自同构.

共中心，由中心位似变换 $x \to x\gamma$ 所組成，其中 γ 跑过体 K 的中心 Z 的乘法羣 Z^*，而 Z^* 与 Z_n 同构.

如果 V 和 W 是 E 的同一維数的两个向量子空間，那么永远存在一个綫性变换 $u \in GL_n(K)$，使得 $u(V) = W$. 换言之，对于任何 r, $1 \leqslant r \leqslant n-1$，羣 $GL_n(K)$ 传递地作用在全体 r 維子空間所組成的集上.

对于任何直射变换 u，設 $\varphi(u)$ 是它所对应的 K 的自同构，映射 $u \to \varphi(u)$ 就是从 $\Gamma L_n(K)$ 到体 K 的自同构羣 A 之上的一个同态. 这个同态的核是 $GL_n(K)$，因此 $\Gamma L_n(K)/GL_n(K) \cong A$.

商羣 $P\Gamma L_n(K) = \Gamma L_n(K)/H_n$ 可以看作体 K 上 $n-1$ 維的右射影空間 $P(E) = P_{n-1}(K)$（可以将它看作 E 的一切直綫所組成的空間）的射影直射变换羣，我們以 $u \to \bar{u}$ 表从 ΓL_n 到 $P\Gamma L_n$ 之上的自然同态. 对于一个射影直射变换 $\bar{u}$，不只是对应着 K 的一个同构 σ，而是对应着 K 的自同构羣 A 对于它的內自同构羣 I（与 K^*/Z^* 同构）的一个陪集 $\bar{\sigma} = \bar{\varphi}(u)$，$\bar{\varphi}$ 是从 $P\Gamma L_n(K)$ 到 A/I 之上的一个同态，它的核是 $P_{n-1}(K)$ 到它自身之上的射影綫性映射所組成的羣 $PGL_n(K) = GL_n(K)/Z_n$（K 上 n 个变数的一般射影羣）；由此推出 $P\Gamma L_n(K)/PGL_n(K) \cong A/I$.

§2. 伸縮变换与平延

此地不拟接触任意体 K 上的向量空間 E 中的直射变换的分类問題，我們只說一下这个問題就是要給出何时两个直射变换 u 和 v 具有关系 $v = tut^{-1}$，而 $t \in GL_n(K)$ 的判断标准. 关于交换域 K 和綫性映射 u，这个問題已由古典的初等因子理論所解决（例如見 N. 布巴基(Bourbaki)[2]）. N. 賈柯勃逊(Jacobson)[1,2 和 3]，T. 納卡亚馬(Nakayama)[1,2]，K. 阿薩諾(Asano)与 T. 納卡亚馬(Nakayama)[1]和 J. 哈恩杰斯(Haantjes)[1]将这个理論推广到任意直射变换去. 在这里只考察以后我們要用到的一些特殊情形.

設 V 和 W 是 E 的两个維数分別为 p 和 $n-p$ $(1 \leqslant p < n)$ 的互补子空間，将 V 和 W（整体地）保持不变的 E 的直射变换 u 由它

对于V和W的限制v和w所决定；这种直射变换組成一羣，与直乘积$\Gamma L_p(K)\times\Gamma L_{n-p}(K)$的一个子羣同构，它由对应于$K$中相同的自同构的那些$v$和$w$所組成的元素对$(v, w)$所組成。显然这个子羣包含将$V$和$W$保持不变的那些綫性直射变换所組成的羣$GL_p(K)\times GL_{n-p}(K)$，这是它的一个正規子羣。

采用同样的記号，我們現在来研究将V中每个元素都保持不变的直射变换u，显然u一定是綫性的，而且由它在V的一个补空間W上的限制所决定。对于$x\in W$，我們可以写$u(x)=v(x)+w(x)$，其中$v(x)\in V$而$w(x)\in W$，v是从W到V之中的一个綫性映射，w是从W到它自身之上的一个綫性映射。綫性映射v和w依賴于V的补空間W的选取，但是过渡到商空間去，w就誘导出从E/V到它自身之上的一个綫性映射，而这个綫性映射只依賴于u。

我們来研究$p=n-1$这个更特殊的情形。換言之，V是一个已知超平面的情形。設$W=aK$是与V互补的一条直綫，并假設$w(a)=a\alpha$，元素$\alpha\in K^*$并不由u完全决定，而是α的共軛$\lambda\alpha\lambda^{-1}$所組成的共軛类$\dot{\alpha}$由$u$所完全决定。有两个情形需要分别研究，即$\dot{\alpha}$化为或不化为$K$的单位元素1这两个情形。如果$\dot{\alpha}\neq\{1\}$，我們就說$u$是一个伸縮变换；这时我們容易証明存在着一条而且是唯一的一条与V互补的直綫$W_0=a_0K$被u（整体地）不变。如果$\dot{\alpha}=\{1\}$而u不是单位元素，我們就說u是一个以V为超平面的平延，那么对于一切$x\in E$，我們可以写$u(x)=x+a\rho(x)$，其中ρ是E上的一个綫性型而具有性質$V=\rho^{-1}(0)$。同时$a\in V$，ρ和a并不完全由u所决定，我們可以用$\lambda\rho$，$\lambda\in K^*$，来代替ρ而同时用$a\lambda^{-1}$来代替a，子空間$V_0=aK\subset V$称为平延u的直綫。这时沒有被u保持不变而不属于V的直綫。

以V为超平面的那些伸縮变换和平延加上单位元素就組成$GL_n(K)$的一个子羣$D(V)$，以V为超平面的那些平延加上单位元素就組成$D(V)$的一个正規阿倍尔子羣，而这个羣与V的加法羣，即K^{n-1}同构；商羣$D(V)/T(V)$与乘法羣K^*同构。如果在射

影空間 $P_{n-1}(K)$ 中将对应于 V 的超平面取作"无穷远超平面"，羣 $D(V)$ 和 $T(V)$ 就有簡单的几何解释；这时 $D(V)$ 就是 K^{n-1} 中将每条直綫都变成与它自己平行的一条直綫的仿射变换所組成的羣，而 $T(V)$ 就是 K^{n-1} 中的平移羣.

两个伸縮变换（或 $D(V)$ 中的两个伸縮变换）在 $GL_n(K)$ 中共軛（或在 $D(V)$ 中共軛），当且仅当它們对应于 K^* 中的同一个共軛元素类 $\dot{\alpha}$. 任意两个平延永远在 $GL_n(K)$ 中共軛（$n \geqslant 2$），$T(V)$ 中的两个平延在 $D(V)$ 中共軛，当且仅当它們对应于同一条直綫 $V_0 \subset V$.

一个綫性变换 $v \in GL_n(K)$ 与一个平延 $u \in T(V)$ 交换的充分必要条件是：1° $v(V) = V$；2° $v(V_0) = V_0$（V_0 是对应于 u 的直綫）；3° 如果 $u(x) = x + a\rho(x)$ 而 $v(a) = a\lambda$，則 $\rho(v(x)) = \lambda\rho(x)$. 两个平延相交换的充分必要条件是它們每一个的直綫都包在另外一个的超平面之中. 羣 $T(V)$ 在羣 $GL_n(V)$ 中的中心化子是（直）乘积 $Z_n T(V)$. 实际上，这样的一个变换 u 将超平面 V 保持不变，而它对于 V 的限制将 V 中的直綫都保持不变，那么这个限制就是一个中心位似变换 h_γ 对于 V 的限制（第二章 § 1）. 由此推出 $h_\gamma^{-1}u$ 是一个以 V 为超平面的伸縮变换或平延，而我們容易看到它只能是平延.

§ 3. 对合与半对合

羣 $GL_n(K)$ 中的对合是綫性变换 u 具有性质 $u^2(x) = x$ 者（我們也把它写作 $u^2 = 1$），这样一个綫性变换的形状随着体 K 的特征数 $\neq 2$ 或等于 2 而有所区别：

1° 如果 K 的特征数 $\neq 2$，E 就是两个子空間 U^+，U^-（可能化为 0）的直接和而 $u(x) = x$ 当 $x \in U^+$，$u(x) = -x$ 当 $x \in U^-$；我們把 U^+ 和 U^- 分别称为对合 u 的正子空間和負子空間. 如果 $\dim(U^+) = p$，我們还把 u 称为一个 $(p, n-p)$ 型的对合（或一个 $(p, n-p)$-对合）. $(p, n-p)$ 型对合或 $(n-p, p)$ 型对合（$p \leqslant n/2$）在 $PGL_n(K)$ 中的象称为 p-对合.

2° 如果K的特征数等于2，我們就有$u(x)=x+v(x)$，其中v是一个綫性变换具有性質$v^2=0$；换言之，$v(E)\subset v^{-1}(0)$。我們仍把$v^{-1}(0)$和$v(E)$称为对合u的子空間．如果$\dim(v(E))=p$，我們必需有$\dim(v^{-1}(0))=n-p$，因而$2p\leqslant n$．我們仍把u称为$(p, n-p)$型的对合或$(p, n-p)$-对合，而把它在$PGL_n(K)$中的象称为p-对合．特别，$(1, n-1)$型的对合只不过是平延（§ 2）．

我們說一个直射变换$u\in \Gamma L_n(K)$是一个半对合，如果它所对应的射影直射变换$\bar{u}$是$P\Gamma L_n(K)$中的一个对合；这就是說，如果$\bar{u}^2=1$，即$u^2(x)=x\gamma$，而$\gamma\in K^*$，对一切$x\in E$，又若σ是对应于u的K的自同构，那么将$u^3(x)$用两种方式表出，我們就得到条件

$$\gamma^\sigma=\gamma. \tag{1}$$

将$u^2(x\xi)$用两种方式表出，于是得到条件

$$\xi^{\sigma^2}=\gamma^{-1}\xi\gamma \tag{2}$$

对一切$\xi\in K$．这样，我們分别研究下面这两个情形：

A) γ不是形状$\lambda\lambda^\sigma$（而$\lambda\in K$）的元素．这时我們能够定义K的一个二次扩张K_0，它是K的一个扩张，在K上的（左及右）維数等于2，在K上有一組（左及右）基由1和一个元素ρ所組成而$\rho^2=\gamma$及$\eta\rho=\rho\eta^\sigma$对一切$\eta\in K$[1]．然后我們可以在E上定义一个在K_0上的右向量空間的結构如下：对于$\zeta=\xi+\rho\eta\in K_0$（$\xi\in K$，$\eta\in K$），令$x\zeta=x\xi+u(x)\eta$，那么$E$在$K_0$上的維数就是$n/2$，这附带也証明了在这个情形$n$一定是偶数（参看 J. Dieudonné[14][2]）．

B) $\gamma=\lambda\lambda^\sigma$而$\lambda\in K$，这时令$v(x)=u(x)\lambda^{-1}$，它是一个对于自同构$\tau$的半对合而$\xi^\tau=\lambda\xi^\sigma\lambda^{-1}$；同时我們有$v^2(x)=x$，$\xi^{\tau^2}=\xi$．設$K_1$是$K$中被$\tau$所不变的那些元素所組成的子体，那么有两个可能的情形：

1) 我們看到，既使K本身是域，如果σ不是单位自同构，那么K_0也是一个非交换的体；于是在我們的理論中引进非交换体的必要性就显然了．

2) 这篇論文的178—179頁所給出的体K_0的存在性的証明对于任何特征数的体K都可以应用，但是如果K的特征数是2而σ將K的中心中的每个元素都保持不变，这时K的扩张K_0就在K上不正規．

B1) $K_1 = K$, 即 τ 是单位自同构, 那么 v 就是 $GL_n(K)$ 中的一个对合. 在上面我們已經求得这样一个直射变换的一般形状;

B2) K 是 K_1 的一个二次扩张, 这时 E 就是 K_1 上的一个 $2n$ 維的右向量空間; 将 v 看作这个向量空間的一个綫性变换, 它就是 $GL_{2n}(K_1)$ 中的一个对合. 如果 K 的特征数 $\neq 2$, K 在 K_1 上就有一組由1和一个元素 ρ 所組成的基, $\rho^2 \in K_1$, $\rho^\tau = -\rho$; E 就是对于 v 的 (K_1 上的) 两个子空間 V^+ 和 V^- 的直接和. 因为 $v(x\rho) = -v(x)\rho$, 所以直射变换 $x \to x\rho$ 将 V^+ 变到 V^-, 因之 V^+ 和 V^- 有相同的維数 n, 而 V^+ 在 K_1 上的一組基 $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 也就是 E 在 K 上的一組基具有性質 $u(e_i) = e_i\lambda$ 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$.

如果 K 的特征数等于 2, K 就在 K_1 上有一組由 1 和一个元素 θ 所組成的基, $\theta^2 + \theta = \beta \in K_1$ 而 $\theta^\tau = \theta + 1$; 我們可以写 $v(x) = x + w(x)$ 而 $w(E) \subset w^{-1}(0) = V$, 同时如果 p 是 $w(E)$ (在 K_1 上) 的維数, 那么 $p \leqslant n$. 容易驗証 $w(x\theta) = w(x)\theta + w(x) + x$, 那么, 如果 $x \in V$, 則 $w(x\theta) = x$; 又因为 $w(V\theta)$ (在 K_1 上) 的維数頂多等于 $w(E)$ 的維数, 我們一定有 $p = n$ 而 $w(E) = V$. 此外, 因为 $x \to x\theta$ 是一个直射变换, 所以 $V\theta$ (在 K_1 上) 的維数就等于 V 的維数, 因而等于 n; 又因为 $V \cap (V\theta) = \{0\}$, 所以 V 和 $V\theta$ 互补. 最后这就証明了, 如果 $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 是 V 在 K_1 上的一組基, 那么它也是 E 在 K 上的一組基而具有性質 $u(e_i) = e_i\lambda$ 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$. 因此这时的結果与 K 的特征数 $\neq 2$ 的情形一样.

§ 4. 射影对合的中心化子

設 $\bar{u}$ 是 $P\Gamma L_n(K)$ 中的一个对合, 我們要研究 $\bar{u}$ 在 $P\Gamma L_n(K)$ 中的中心化子 $\bar{H}$, 即与 $\bar{u}$ 相交换的射影直射变换 $\bar{v}$ 所組成的羣. 同样要研究对应于 $\bar{v}$ 的那些 $v \in \Gamma L_n(K)$ 所組成的子羣 H. 这样的一个直射变换 v 由与 u "射影可换"这个性質所刻划, 即 $v(u(x)) = u(v(x))a$ 对于一个 $a \in K$, 这个关系式也可以簡記作 $vu = uv \cdot a$. 如果 σ 和 τ 分别是对应于 u 和 v 的 K 的自同构, 那么在上面的关系式中用 $x\xi$ 来代替 x, 我們首先得到条件

$$\xi^{\sigma\tau} = a^{-1}\xi^{\tau\sigma}a \tag{3}$$

对一切 $\xi \in K$(我們令 $\xi^{\sigma\tau} = (\xi^{\sigma})^{\tau}$). 如果 $u^2(x) = x\gamma$, 我們还有条件(1)和(2);此外,将 $u(v(u(x)))$ 用两种方法表出,我們就得到条件

$$\gamma^{-1}\gamma^{\tau} = a^{\sigma}a. \tag{4}$$

我們再注意,为了研究起初的問題,可以随意用 $u\cdot\alpha$ 和 $v\cdot\beta$ 去代替 u 和 v, 而 α 和 β 是 K^* 中的任意元素; 这样 a 就被 $\alpha^{-1}\beta a\alpha^{\tau}\beta$ 所代替. 而 γ 就被 $\gamma\alpha^{\sigma}\alpha$ 所代替. 与 §3 的討論相一致, 我們仍然分别研究下面这几种情形(我們仍采用 §3 的記号):

A) γ 不是形状 $\lambda\lambda^{\sigma}(\lambda \in K)$ 的元素. 将 E 看作是 K_0 上 $n/2$ 維的向量空間, 我們就看到 u 变成了直射变换 $x \to x\rho$; 由于关系式(3)和(4)成立,我們可以把 K 的自同构 τ 扩张成 K_0 的一个自同构 τ 使得 $\rho^{\tau} = \rho a$, 那么条件 $v(x\rho) = v(x)\rho a$ 可以写作 $v(x\rho) = v(x)\rho^{\tau}$, 换言之 v 是 K_0 上的向量空間 E 的一个对于自同构 τ 的直射变换. 反之,要使这样一个直射变换 v 与 u 射影可换,必須而且只須它所对应的 K_0 的自同构 τ 适合下面两个条件: 1° 它将 K(全局地)保持不变; 2° $\rho^{\tau} = \rho a$, $a \in K$. 于是羣 H 就是 $\Gamma L_{n/2}(K_0)$ 的一个子羣, 由那些对应于适合上面两个条件的自同构 τ 的直射变换所組成. 我們注意, H 永远包有一般綫性羣 $GL_{n/2}(K_0)$, 而它是 H 的正規子羣.

B) $\gamma = \lambda\lambda^{\sigma}$, $\lambda \in K^*$. 用 $u\cdot\lambda^{-1}$ 去代替 u, 就化为 $\gamma = 1$ 而 $\sigma^2 = 1$ 的情形.

B1) 首先假定 σ 是单位自同构, 这时条件(4)給出 $a^2 = 1$, $a = \pm 1$.

a) 首先假定 K 的特征数 $\neq 2$. 如果 $vu = uv$, 我們就有 $v(U^+) = U^+$, $v(U^-) = U^-$,而且反之亦然. 如果 $vu = -uv$, 我們就有 $v(U^+) = U^-$, $v(U^-) = U^+$, 这只在 $n = 2p$ 而 u 是一个 (p, p)-对合时才是可能的. 因此,如以 H_0 表 u 在 $\Gamma L_n(K)$ 之中的中心化子, 则 H_0 在 H 中的指数是 1 或 2, 第二个情形只在 u 是一个 (p, p)-对合时才发生. 至于 H_0, 它同构于直乘积 $\Gamma L_p(K) \times$

$\Gamma L_{n-p}(K)$(如果 u 是一个$(p, n-p)$-对合)的一个子羣,而由对应于K中相同的自同构的那些 v_1 和 v_2 所組成的元素对 (v_1, v_2) 所組成;羣积 $GL_p(K) \times GL_{n-p}(K)$ 是 H_0 的一个正規子羣.

β) 現在假定K的特征数等于 2, 我們有 $u(x) = x + w(x)$, 而 $w(E) \subset w^{-1}(0) = U$. 令 $p = \dim w(E)$, u 在 $\Gamma L_n(K)$ 中的中心化子H也是w在 $\Gamma L_n(K)$ 中的中心化子, 于是一切 $v \in H$ 都使 U和 $w(E) = W$ 全局地不变. 設 H_0是 H 的一个正規子羣,它由在商空間 E/U 上誘导出的半綫性映射是单位映射的那些v所組成,那么 v 必須是綫性的. 假定 U' 是U在E中的补空間,而对于一切 $v \in H$ 和一切 $x \in U'$ 令 $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$,其中 $v_1(x) \in U'$ 而 $v_2(x) \in U$. 我們应該有 $w(v_1(x)) = v(w(x))$ 对于 $x \in U'$, 因此当 v_1 已知时, v 在 $W = w(U')$ 中就完全确定而在W对于U的一个补空間 W' 中可以任意选取只要使得将 W' 映到U中就行,于是首先我們看到 H/H_0 与 $\Gamma L_p(K)$ 同构. 在 H_0 中有一个正規子羣 H_1,它是由将U中每个元素都保持不变的 v 所組成的,容易看到它与加法羣 $K^{p(n-p)}$ 同构;另一方面,如果 $v \in H_0$, 我們就有 $v(x) = x$ 在 W 中,而且反之亦然.由此容易推出,在 H_0 的模 H_1 的每个倍集之中,都有一个 v 使得 $v(x)=x$ 在 $U'+W$ 中;因此 H_0/H_1 与 $v \in H^0$ 对于子空間U的限制所組成的羣 H_0' 同构. 設 H_2' 是由 H_0' 中将U的模W的每个倍集都保持不变的 v' 所組成的正規子羣, 我們很容易驗証 H_0'/H_2' 与 $GL_{n-2p}(K)$ 同构, 而 H_2' 与加法羣 $K^{p(n-2p)}$ 同构. 以 H_2 表 H_2' 在H中的完全反象,我們就得到H的一个正規羣列

$$H \supset H_0 \supset H_2 \supset H_1 \supset \{1\},$$

它們的商羣依次同构于

$$\Gamma L_p(K),\ GL_{n-2p}(K),\ K^{p(n-2p)},\ K^{p(n-p)}.$$

B2) 現在假定σ不是单位自同构,而且假定 K_1 是K中被σ所保持不变的元素所組成的子体,这时(4)給出 $a^\sigma a = 1$. 于是自同构σ将变換域 $Z(a)$ 全局地保持不变. 如果σ对于 $Z(a)$ 的限制是单位自同构,我們就有 $a^2 = 1, a = \pm 1$. 在相反的情形,因为σ是 2 阶元素, 就存在一个 $b \in Z(a)$ 使得 $a = b^{1-\sigma}$, 那么若用

$v \cdot b^{-1}$ 代替 v，我們仍然有 u 与 vb^{-1} 射影可換．因此我們永远可以假定 $a = \pm 1$.

此外，我們注意这时条件(3)給出 $\xi^{\tau\sigma} = \xi^{\sigma\tau}$ 对 $\xi \in K$，因此 K_1 被 K 的自同构 τ（全局地）保持不变.

α) 首先假定 K 的特征数 $\neq 2$．由 $\Gamma L_n(K)$ 中具有性質 $vu = \pm uv$ 的 v 所組成的子羣 H 包有 u 在 $\Gamma L_n(K)$ 中的中心化子 H_0，作为它的指数 2 的正規子羣，我們只限于討論 H_0．我們已知，如将 E 看作 K_1 上的 $2n$ 維向量空間，它就是 n 維子空間 U^+ 和 U^- 的直接和而 $U^- = U^+\rho$．設 τ 是对应于 $v \in H_0$ 的 K 的自同构，就应該有 $v(U^+) = U^+$, $v(U^-) = U^-$，而且反之亦然．于是 v 对于 U^+ 的限制就是这个（K_1 上的）空間的一个直射变换．此外，因为 $\rho^{\tau\sigma} = \rho^{\sigma\tau} = -\rho^\tau$，必須有 $\rho^\tau = \rho\alpha$ 而 $\alpha \in K_1$；如果令 $\xi^\omega = \rho^{-1}\xi\rho$ 对于 $\xi \in K_1$，那么 ω 是 K_1 的一个自同构，于是有

$$\xi^{\tau\omega} = \alpha\xi^{\omega\tau}\alpha^{-1}. \tag{5}$$

此外，如果 $\rho^2 = \beta \in K_1$，我們就应該有 $\beta^\tau = (\rho^\tau)^2 = \rho\alpha\rho\alpha$，由此推出

$$\beta^{-1}\beta^\tau = \alpha^\omega\alpha. \tag{6}$$

反之，如果 τ 是 K_1 的一个自同构且适合条件(5)和(6)对于一个适当的 $\alpha \in K_1$，那么 τ 能扩张成 K 的一个自同构使得 $\rho^\tau = \rho\alpha$，而且能将 U^+(在 K_1 上)的一个对于自同构 τ 的直射变换 v 扩张成 E（在 K 上)的一个直射变换，如令 $v(x\rho) = v(x)\rho^\tau$．因为这时 $v(U^-) = U^-$，就有 $v \in H_0$．因此得出結論，H_0 与 $\Gamma L_n(K_1)$ 中(对一个依賴于 τ 的 α) 适合条件(5)和(6)的 K_1 的自同构 τ 的直射变换組成的子羣同构．我們注意，一般綫性羣 $GL_n(K_1)$ 是 H_0(以及 H)的一个正規子羣.

β) 假定 K 的特征数为 2．我們已知，将 E 看作 K_1 上的 $2n$ 維向量空間，它就是 $V = w^{-1}(0)$ 与 $V\theta$ 的直接和，而 $\theta^2 + \theta = \beta \in K_1$ 及 $\theta^\sigma = \theta + 1$；此外(Dieudonné[14]，181 頁)，映射 $\xi \to D\xi = \theta\xi + \xi\theta$ 是体 K_1 的一个微分映射．v 属于 H 的充分必要条件是 $vw = wv$；将 $v(w(x)) = w(v(x))$ 对 $x \in V$ 写出，首先得到条

件 $v(V)=V$. 另一方面，我們有 $\theta^{\tau\sigma}=\theta^{\sigma\tau}=\theta^{\tau}+1$，因此 $\theta^{\tau}=\theta+\lambda$ 而 $\lambda\in K_1$；考虑到关系式 $w(x\theta)=x$ 对于 $x\in V$，我們就能験証 $v(w(x\theta))=w(v(x\theta))$ 对于 $x\in V$，因此由关系式 $\theta^{\tau}=\theta+\lambda$ 推出：如果 $v(V)=V$，v 和 w 就变换. 注意，如果对关系式 $D\xi=\theta\xi+\xi\theta$ 运用 τ，我們就得到

$$(D\xi)^{\tau}-D(\xi^{\tau})=\lambda\xi^{\tau}+\xi^{\tau}\lambda. \tag{7}$$

另一方面，我們有

$$\beta^{\tau}-\beta=\lambda^2+\lambda. \tag{8}$$

反之，如果 τ 是对于一个适当的 $\lambda\in K_1$ 适合条件(7)和(8)的 K^1 自同构，我們就能将 τ 扩张成 K 的一个自同构使得 $\theta^{\tau}=\theta+\lambda$ 而将 V（在 K_1 上）对于自同构 τ 的一切直射变换 v 扩张成 E（在 K 上）的一个直射变换，如令 $v(x\theta)=v(x)\theta^{\tau}$. 我們推出，$H$ 与 $\Gamma L_n(K_1)$ 中（对一个依賴于 τ 的 λ）适合条件(7)和(8)的 K_1 的自同构 τ 的直射变换所組成的羣同构. 一般綫性羣 $GL_n(K_1)$ 是 H 的一个正規子羣.

关于 $GL_n(K)$ 中任意一个綫性变换 u 在 $GL_n(K)$ 中的中心化子的研究，可以参看 B. L. 范德威尔登 van der Waerden 和 O. 施来午 (Schreier)[1]以及 J. 狄多涅 (Dieudonné)[3]，这些研究都对体 K 加以某些限制.

§ 5. 对射变换与半双綫性形式

我們知道体 K 上的一个右向量空間 E 的对偶 E^* 是 K 上的一个左向量空間，它的維数等于 E 的維数；对于 $x\in E$ 及 $x'\in E^*$，我們时常用 $\langle x', x\rangle$ 来代替 $x'(x)$. 也可把 E^* 看作是与 K 相逆的体 K^0 上的右向量空間. 仅当体 K 与 K^0 同构时，即仅当存在一个从 K 到它自身之上的一一映射 J 适合条件 $(\alpha+\beta)^J=\alpha^J+\beta^J$ 及 $(\alpha\beta)^J=\beta^J\alpha^J$ 时（这样的映射称为 K 的反自同构），才有从 E 到 E^* 之中的半綫性映射存在. 我們注意，当 K 是域时，K 的一个反自同构即是自同构，而且反之亦然. 从 E 到 E^* 之中的一个对于 K 的反自同构 J 的半綫性映射中 ϕ 具有性质

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y) \quad \text{对 } x\in E,\ y\in E,$$
$$\varphi(x\lambda)=\lambda^J\varphi(x) \quad \text{对 } x\in E,\ \lambda\in K.$$

对于这样的半綫性映射 φ，訨从 $E\times E$ 到 K 中的映射 $(x,y)\to f(x,y)=\langle\varphi(x),y\rangle$ 与之相当，显然这个映射适合条件：

$$f(x_1+x_2,y)=f(x_1,y)+f(x_2,y),$$
$$f(x,y_1+y_2)=f(x,y_1)+f(x,y_2),$$
$$f(x\lambda,y)=\lambda^J f(x,y),$$
$$f(x,y\mu)=f(x,y)\mu.$$

这样的映射称为 $E\times E$ 上对于反自同构 J 的半双綫性形式；当 K 是域而 J 是单位自同构时，f 就是 $E\times E$ 上的双綫性形式. 反之，这样的半双綫性形式显然可以表成而且可以唯一地表成形状 $\langle\varphi(x),y\rangle$，其中 φ 是从 E 到 E^* 中的一个半綫性映射. 設 $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 E 的一組基，$(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 E^* 中与它对偶的一組基使得 $\langle e'_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$. 如果令 $\varphi(e_i)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}e'_j$，就有 $\alpha_{ij}=\langle\varphi(e_i),e_j\rangle=f(e_i,e_j)$，因此对于 $x=\sum_i e_i\xi_i$，$y=\sum_i e_i\eta_i$ 就有 $f(x,y)=\sum_{i,j}\xi_i^J\alpha_{ij}\eta_j={}^t x^J\cdot A\cdot y$，其中 x 和 y 看作是由它們的坐标所組成的单列矩陣而令 $A=(\alpha_{ij})$；φ 对于基 (e_i) 和 (e'_i) 的矩陣 A 称为半双綫性形式 f 对于 E 的基 (e_i) 的矩陣. 它的秩与基 (e_i) 的选取无关，也等于映射 φ 的秩，称为半双綫性形式 f 的秩.

如果 $(\bar e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 E 的另外一組基，P 是从 (e_i) 过渡到 $(\bar e_i)$ 的矩陣，而 A' 是 f 对于 $(\bar e_i)$ 的矩陣，我們就有 $A'={}^tP^JAP$. 当 K 是域时，矩陣 A 的行列式称为 f 对于基 (e_i) 的判别式 Δ；如果 Δ' 是 f 对于基 $(\bar e_i)$ 的判别式，那么有 $\Delta'=(\delta\delta^J)\Delta$，其中 δ 表示 P 的行列式.

从 E 到 E^* 上的一个对射变换，依定义是从 E 到 E^* 上的一一半綫性映射，或者說是一个秩等于 E 的維数的半綫性映射. 对应于对射变换 φ 的 $E\times E$ 上的半双綫性形式 f 称为非退化的，这样一个形式由下述性質所刻划：任何向量 $x\in E$ 使得 $f(x,y)=0$ 对

一切 $y\in E$ 一定等于 0.

§6. 自反半双綫性形式

以下除非特別声明，我們只研究 $E\times E$ 上(对于K的反自同构的)非退化的半双綫性形式. E 的两个向量 x 和 y 在所取的順序下称为对形式 f 是正交的，如果 $f(x,y)=0$；f 是非退化的，意思就是不存在着向量 $x\neq 0$ 使得 x 与一切 $y\in E$ 都正交. 我們說形式 f (或相应的对射变换 φ)是自反的，如果正交关系是对称的，即若 $f(x,y)=0$ 与 $f(y,x)=0$ 等价；下面确定(当 $n\geqslant 2$ 时)自反半双綫性形式 (G. Birkhoff 和 J. von Neumann[1]).

首先，可以只研究非退化的自反形式. 实际上，如果 f 是自反的而且是退化的，那么与E中一切向量都正交的向量 x 的集合就是一个子空間 N，而关系式 $x\equiv x_1(\mathrm{mod}\,N)$，$y\equiv y_1(\mathrm{mod}\,N)$蘊涵 $f(x,y)=f(x_1,y_1)$. 于是 f 就在商空間 E/N 上定义了一个非退化的自反形式(称为与 f 相应的非退化的自反形式)，而 f 就由关于 f_1 的知識所完全确定.

如果J是对应于f的反自同构，那么f是非退化自反形式这个假設的意思就是，对于E中任何 $x\neq 0$，$f(x,y)=0$ 和 $(f(y,x))^{J^{-1}}=0$ 是同一个超平面的方程，因此我們有 $f(y,x)=(f(x,y))^J m(x)$，而 $m(x)$ 是一个只依賴于 x 的K中元素. 如果 x_1 和 x_2 綫性无关，那么从上面的关系式容易推出 $m(x_1+x_2)=m(x_1)=m(x_2)$；因此我們一定有 $f(y,x)=f(x,y)^J r^{-1}$，而 r 是一个与 x 和 y 无关的 $\neq 0$ 的元素.

此外，用两种方法来計算 $(f(y,x))^J$，就有

$$\xi^{J^2}=r^J\xi r\qquad \text{对一切 } \xi\in K, \tag{9}$$

而特別

$$r^J r=1. \tag{10}$$

这样，我們分別研究下面两种情形:

1) 我們有 $\xi+\xi^J r^J=0$ 对一切 $\xi\in K$. 令 $\xi=1$ 就得到 $r=-1$，因此 $\xi^J=\xi$ 对一切 $\xi\in K$；这只在K是域而J是单位自

同构时才可能．换言之，这时有恆等式

$$f(x, y) = -f(y, x), \tag{11}$$

把 f 称为反对称形式．

2）存在一个 $\zeta \in K$ 使得 $q = \zeta + \zeta^J r^J \neq 0$，我們立即推出 $r = q^{-1} q^J$．如果令 $\xi^T = (q^{-1}\xi q)^J$ 而 $g(x, y) = f(x, y) q^{-1}$，那么就能驗証

$$\xi^{T^2} = \xi \qquad \text{对一切 } \xi \in K \tag{12}$$

以及

$$g(y, x) = (g(x, y))^T. \tag{13}$$

我們説反自同构 T 是 K 里的一个对合，而条件(13)表明 g 是对于这个对合的一个厄米特半双綫性形式．如果 K 是域而 T 是单位自同构，条件(13)就可写成

$$g(y, x) = g(x, y). \tag{14}$$

这时我們説 g 是一个对称双綫性形式．如果 T 不是单位自同构，那么元素 $\alpha \in K^*$ 具有性质 $\alpha^T = \alpha$ 者称为对于对合 T 的对称元素，具有性質 $\alpha^T = -\alpha$（因为 T 不是单位自同构，所以这种元素一定存在）者称为反对称元素．設 α 是一个对于 T 的对称（或反对称）元素，并且令 $\xi^S = \alpha \xi^T \alpha^{-1}$ 及 $h(x, y) = \alpha g(x, y)$，可以驗証 S 仍然是 K 的一个对合而且我們有

$$\left.\begin{aligned} h(y, x) &= (h(x, y))^S && \text{如果 } \alpha \text{ 是对称元素，} \\ h(y, x) &= -(h(x, y))^S && \text{如果 } \alpha \text{ 是反对称元素．} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

在第二种情形，我們把 h 称为对于对合 S 的反厄米特形式．

一个半双綫性形式 f 是厄米特形式（或反厄米特形式）的充分必要条件是它对于 E 的任意一組基的矩陣 A 适合条件 ${}^tA = A^J$（或 ${}^tA = -A^J$）．

这个条件可用另外一种方式表出．如果 u 是从向量空間 E 到向量空間 F 之中的一个对于同构 σ 的半綫性映射，那么对于 F 的对偶 F^* 中的任何元素 y' 映射 $x \to (\langle y', u(x)\rangle)^{\sigma^{-1}}$ 都是 E 上的一个綫性形式；于是我們可以写

$$\langle y', u(x)\rangle = \langle {}^t u(y'), x\rangle^{\sigma}, \tag{16}$$

其中 ${}^{t}u$ 是从 F^* 到 E^* 之中的一个对于同构 σ^{-1} 的半綫性映射；这个映射我們称为半綫性映射 u 的轉置. 特别，对于从 E 到 E^* 之上的反自同构 J 的对射变换 φ，${}^{t}\varphi$ 是一个从 E 到 E^* 之上的对于反自同构 J^{-1} 的对射变换而

$$\langle\varphi(x), y\rangle = \langle{}^{t}\varphi(y), x\rangle^{J}. \tag{17}$$

因此，对应于 φ 的半双綫性形式 f 是厄米特形式(或反厄米特形式)的意思是 ${}^{t}\varphi = \varphi$ (或 ${}^{t}\varphi = -\varphi$).

我們已經証明了将一个自反形式右乘以体 K 中一个元素之后，永远可以假定它是厄米特形式或反厄米特形式；因此以下只限于研究这两种形式. 当我們談到一个自反形式时，总了解为它是厄米特形式或反厄米特形式(在各种情形 J 都是一个对合).

§7. 正交子空間与迷向子空間

設 f 是 n 維向量空間 E 上的(非退化的)自反形式. 对于 E 的任何一个向量子空間 V，E 中那些与 V 中一切向量都正交的向量集合 V^0 是 E 的一个向量子空間，称为 V 的正交子空間；反之，V 是 V^0 的正交子空間. 如果 p 是 V 的維数，那么 V^0 的維数就是 $n-p$. 对于任意两个子空間 V 和 W，我們有 $(V+W)^0 = V^0 \cap W^0$ 及 $(V\cap W)^0 = V^0 + W^0$. 如果 $V \cap V^0$ 不等于 0，子空間 V 是迷向的；这时 V^0 也是迷向的. 这也等于說 f 在 $V\times V$ 上的限制是一个退化形式. 我們說子空間 V 是全迷向的，如果 $V\subset V^0$；这也等于說 f 在 $V\times V$ 上的限制恆等于零(或 V 中任意两个向量都正交). 这时有 $p \leqslant n-p$，亦即 $2p\leqslant n$；形式 f 的指数定义为 E 的全迷向子空間的最大維数 ν，因此 $2\nu\leqslant n$. 对于一切迷向子空間 V，$V\cap V^0$ 都是全迷向的. 再注意，如果 V 是全迷向的而 W 是包在 V^0 中的一个全迷向子空間，那么 $V+W$ 也是全迷向的；由此推出，如果 V 的維数等于 ν，那么包含在 V^0 中的一切全迷向子空間一定包含在 V 之中.

E 的子空間 V 不是迷向的当且仅当 V 的正交子空間 V^0 与 V 相补；但这样一个子空間可以包含迷向直綫. 我們說 V 是絕对非迷

向的，如果它不包含迷向直綫；这样一个子空間一定是非迷向的.

一个向量 $x \neq 0$ 称为迷向的，如果 $f(x, x) = 0$（与它自己正交）. 全迷向子空間中一切向量都显然是迷向的；反之，假定 $f(x, x) = 0$ 对一切属于 E 的子空間 V 的 x. 将 $f(x+y, x+y) = 0$ 对 $x \in V$ 及 $y \in V$ 写出，就得到 $f(x, y) = \varepsilon(f(x, y))^J$，其中 $\varepsilon = -1$，如果 f 是厄米特形式；$\varepsilon = 1$，如果 f 是反厄米特形式. 如果 V 不是全迷向的，将 y 用 $y\xi$ 代替，我們就得到 $\xi^J = \lambda\xi\lambda^{-1}$ 对于一个 $\lambda \neq 0$ 和一切 $\xi \in K$，但这只在 K 是域而 J 是单位自同构时才可能，而这时显然 f 应該是反对称的. 特别，如果 $f(x, x) = 0$ 对一切 $x \in E$，形式 f 就称为交錯的，而这时它是反对称的；反之，如果 K 是特征数 $\neq 2$ 的交换域，$E \times E$ 上的一切反对称形式都是交錯的.

§8. 自反半双綫性形式的等价

設 E 和 F 是体 K 上同一維数 n 的向量空間而 u 是从 F 到 E 之上的一个同构. 假定給了 $E \times E$ 上的一个半双綫性形式 f（它是退化的或非退化的，自反的或不是自反的），则 $F \times F$ 上的形式 $(x, y) \to f(u(x), u(y))$ 显然是半双綫性的（对于 K 的同一反自同构而言）；我們説这个形式 f_1 是利用同构 u 来变形 f 所得到的. 如果 A 是 f 对于 E 的基 $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 的矩陣，那么 A 也是 f_1 对于 F 的基 $(u^{-1}(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 的矩陣；对于 F 的另外一組基，f_1 的矩陣的形状就是 ${}^tU^JAU$，其中 U 为可逆矩陣.

我們説 $E \times E$ 上的半双綫性形式 f 与 $F \times F$ 上的半双綫性形式 f_1 是等价的，如果 f_1 是 f 在 F 到 E 上的一个同构 u 之下的变形；这时，f 就是 f_1 在 u^{-1} 之下的变形. 如果 A 和 A_1 分别是 f 和 f_1 对于 E 和 F 中的两組基的矩陣，那么 f 和 f_1 是等价的就等于存在一个可逆矩陣使得 $A_1 = {}^tU^JAU$；我們也可以如此叙述 f 和 f_1 等价的定义，即存在 E 的一組基和 F 的一組基使得 f 和 f_1 的相应矩陣相同.

寻求 $E \times E$ 上两个半双綫性形式等价的条件这个問題目前

只对自反形式有所討論；我們把已經获得的主要結果扼要地叙述一下．

首先，两个等价的形式一定有相同的秩；容易推知，两个退化的自反形式等价的充分必要条件是与它們相应的非退化自反形式（§6）等价．因此我們只要研究非退化的自反形式的等价問題就行了．

等价問題只对于（域K上的）交錯形式完全解决了．这样一个形式只在E的維数是偶数$2m$时才是非退化的；同时可以証明，存在E的一組基（称为对f的辛基）使得

$$f(e_i, e_j) = 0, \qquad \text{若 } j \neq i + m,\ i \neq j + m,$$

$$f(e_i, e_{i+m}) = -f(e_{i+m}, e_i) = 1 \qquad \text{对于 } 1 \leqslant i \leqslant m.$$

（我們要在§11中証明一个更广的結果）．因此$E \times E$上秩相等的两个交錯形式一定等价．

关于任意体上非交錯的自反形式，只知道它們等价的一些必要条件．首先是两个形式的指数（§7）相等（在§11中我們将看到一个更精确的必要条件）．此外，如果K是域，那么两个等价形式的行列式应該属于羣K^*对其"范"$\lambda\lambda^J$所組成的子羣的同一陪集．

如果自反形式f不是反对称的，那么在E中就存在对于f的一組正交基，即具有性质

$$f(e_i, e_j) = 0 \qquad \text{对 } i \neq j$$

的一組基$(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$．此外，对于这样一組基，如令$\gamma_i = f(e_i, e_i)$，那么当$f$是厄米特形式时，我們就有$\gamma_i^J = \gamma_i$；而当$f$是反厄米特形式时就有$\gamma_i^J = -\gamma_i$．欲証明这个結果，只需对$n$施行归納法：首先$E$中至少存在一个非迷向向量$e_1$，那么$e_1$的正交超平面$H$仍是非迷向的而且与$e_1K$相补；又因为$f$不是反对称的，所以根据归納法假設对于$f$在$H$上的限制存在一組正交基，我們的命題因而得証．在§10中我們再研究这里留下的一个情形，即特征数2的域上非交錯的对称形式．

正交基的存在使得一些情形能够解决等价問題．例如，若K是代数封閉域而f是$E \times E$上的非退化对称形式，那么存在E的

一組正交基使得 $f(e_i, e_i)=1$, $1 \leqslant i \leqslant n$(这样一組基称为法正交基);因此这个情形同秩的对称形式永远等价. 如果K是欧氏有序域(即其中每个 $\geqslant 0$ 的元素都有一个平方根), 而 f 是 $E \times E$ 上的非退化对称形式,那么存在 E 的一組正交基(e_i)使得 $f(e_i, e_i)=1$, $1 \leqslant i \leqslant p$; $f(e_i, e_i) = -1$, $p+1 \leqslant i \leqslant n$. 更进一步,在任意有序域$K$上,对于$E$中非退化对称形式 f 的一切正交基(e_i)而言, 指标 i 使得 $\gamma_i = f(e_i, e_i) > 0$ 的个数一定相等(錫尔外斯特(Sylvester)的惯性律);数偶$(p, n-p)$称为形式 f 的符号数而$n-p$称为它的惯性指数; 两个等价形式一定有相同的符号数; 在一个欧氏有序域上,这个必要条件也是充分的. 在 §11 中将証明,对于一个有序域 K,一定有关系式 $\nu \leqslant \min(p, n-p)$; 而当$K$是欧氏有序域时,等号成立.

如果K是 q 个元素的有限域 $\mathbf{F}_q$, 其特征数 $\neq 2$, 那么对于对称形式 f 永远存在一个正交組 (e_i) 使得 $f(e_i, e_i) = 1$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$; $f(e_n, e_n) = 1$ 或 $f(e_n, e_n) = \rho$, 其中 ρ 是 $\mathbf{F}_q$ 中的一个非平方元素(乘法羣 $\mathbf{F}_q^*$ 中的平方元素組成指数 2 的子羣, 参看 L. E. 狄克逊(Dickson)[1], 158 頁); 因此 $\mathbf{F}_q$ 上有两类 n 秩的等价对称形式; 第一类中对称形式(对于任意一組基)的判别式 Δ 是 $\mathbf{F}_q$ 中的一个平方元素,而第二类中对称形式的判别式不是平方元素. 如果 $n = 2m+1$ 是奇数, 那么第二类中的任何一个对称形式乘上 $\mathbf{F}_q$ 中一个非平方元素后就化为第一类中的对称形式; 这时一切对称形式的指数都是 $m = [n/2]$. 如果 $n = 2m$ 是偶数, 那么当 $(-1)^m\Delta$ 是 $\mathbf{F}_q$ 中一个平方元素时,指数等于 m,否則指数等于 $m-1$.

当K是代数数域时, 对称形式的等价問題已由閔考斯基 (H. Minkowski)[1] 和哈塞 (H. Hasse)[2] 完全解決. 在这种域上对称形式的近代理論基于克黎福特代数 (第二章 §7) 的研究; 例如, 在維特(E. Witt)[1]的工作里和艾錫勒(M. Eichler)[2]的书里, 对于这个理論和它的推广都有所闡明,我們在后面将会談到.

設 K_0 是有序域而K是 K_0 的一个二次扩张, J 是K的异于单

位的自同构使得 K_0 是 K 中对于 J 对称的元素的集合；設 f 是 $E \times E$ 上的厄米特形式而 (e_i) 是 E 对于 f 的一組正交基，則指标 i 使得 $\gamma_i = f(e_i, e_i) > 0$ 的个数仍然与选取的正交基无关(惰性律)．当 K 是中核 K_0 上的广义四元数体而 J 是 K 的唯一对合使得它的不变元素即为 K_0 中的元素时，这个結果仍然成立． 此外，如果 K_0 是欧氏有序体（而 K 为 K_0 的二次扩张或为 K_0 上的广义四元数体)，那么 K 上两个厄米特形式等价的充分必要条件是它們有相同的符号数．我們再指出，当 K_0 是欧氏有序域而 K 是 K_0 上的广义四元数体时，对于 $E \times E$ 上的一切反厄米特形式 f 一定存在一組正交基 (e_i) 使得 $f(e_i, e_i) = j$, $1 \leqslant i \leqslant n$, 而 j 为一个固定的四元数其平方为 -1；因此这时两个同秩的反厄米特形式永远等价(J. Dieudonné[13], 383 頁)．

現在假定 K_0 是任意一个有限域 $\mathbf{F}_q$, K 是 $\mathbf{F}_q$ 的一个二次扩张 $\mathbf{F}_{q^2}$, J 是 K 中唯一的异于单位自同构的 K_0-自同构 $\xi \to \xi^q$. 这时对于 $E \times E$ 上的每个厄米特形式都存在一組法正交基；換言之，两个同秩的厄米特形式永远等价，因之它們的指数是极大值$[n/2]$．这个結果由 K_0 中每个元素都是 K 中元素的范这件事实立刻推出．

最后我們指出，代数数域上厄米特形式的等价問題已由 W. 兰德黑尔(Landherr)[1]所解决．

§9. 酉 羣

設 f 是 $E \times E$ 上一个相应于 K 的对合 J 的（非退化）自反形式，从 E 到它自身之上的一一綫性映射 u 使得 f 等于它自己在 u 之下的变形，即使得

$$f(u(x), u(y)) = f(x, y), \qquad x \in E, y \in E \tag{18}$$

者，称为 E 的对于形式 f 的酉变换． 它們組成 $GL_n(K)$ 的一个子羣，我們把它記作 $U_n(K, f)$ 并称它为对于 K 和形式 f 的 n 个变数的酉羣．

关系式(18)可以用另一种方式写出：設 φ 是与形式 f 相关的

对射变换，而 $\check{u}$ 是 u 的逆步变换 ${}^t u^{-1}$，则(18)等价于关系式

$$\langle \varphi(u(x)),\ u(y)\rangle = \langle \varphi(x),\ y\rangle = \langle \check{u}(\varphi(x)),\ u(y)\rangle,$$

又因为当 y 跑过 E 时 $u(y)$ 亦跑过 E，这个关系式又等价于

$$\varphi(u(x)) = \check{u}(\varphi(x)) \qquad \text{对一切 } x \in E.$$

更一般些，設 u 是 E 的对于 K 的一个自同构(記作 σ 或 σ_u)的直射变换，我們說对射变换 φ 和直射变换 u **射影可换**，如果 K 中存在一个元素 r_u 使得

$$\varphi(u(x)) = r_u \check{u}(\varphi(x)) \qquad \text{对一切 } x \in E, \tag{19}$$

其中依然令 $\check{u}$ 为 u 的**逆步变换** ${}^t u^{-1}$(它是 E^* 的一个对于 u 所对应的自同构 σ 的直射变换)．这个关系式等价于关系式

$$\langle \varphi(u(x)),\ u(y)\rangle = \langle r_u \check{u}(\varphi(x)),\ u(y)\rangle,$$

对于一切 $x \in E$ 和一切 $y \in E$；根据(16)式，它又等价于

$$f(u(x),\ u(y)) = r_u \cdot (f(x,\ y))^\sigma. \tag{20}$$

注意，如果在(19)中以 $x\xi$ 来代替 x，我們就得到关系式

$$\xi^{\sigma J} = r_u \xi^{J\sigma} r_u^{-1}, \qquad \text{对一切 } \xi \in K. \tag{21}$$

如果在(20)中将 x 和 y 互换并考虑到 f 是厄米特形式或反厄米特形式，我們就得到

$$r_u^J = r_u. \tag{22}$$

把适合(20)的直射变换 u 称为(对于形式 f 的)对应于自同构 σ_u 和乘子 r_u 的**酉半类似变换**；条件(20)也可以改述成：对于 E 的一組基 (e_i)，我們有

$$f(u(e_i),\ u(e_j)) = r_u \cdot (f(e_i,\ e_j))^\sigma,$$

或 u 对于这組基的矩陣 U 适合关系式

$${}^t U^J A U = r_u \cdot A^\sigma, \tag{23}$$

其中 A 表 f 对于基 (e_i) 的矩陣．显然(对于 f 的)酉半类似变换組成直射变换羣 $\Gamma L_n(K)$ 的一个子羣 $\Gamma U_n(K,f)$．对应于单位自同构的(即綫性的)酉半类似变换也称为(对于 f 的)**酉类似变换**，这种变换組成 $\Gamma U_n(K,f)$ 的一个正規子羣 $GU_n(K,f) = \Gamma U_n(K,f) \cap GL_n(K)$．**酉羣** $U_n(K,f)$ 就是那些乘子为 1 的酉类似变换(称为酉变换)所組成的羣它是 $GU_n(K,f)$ 的一个正規子羣．設 A 是

f 对于 E 的一組基的矩陣，我們也写 $U_n(K, A)$ 来代替 $U_n(K, f)$，对于其余的羣也有类似地写法．

映射 $u \to \sigma_u$ 是从 $\Gamma U_n(K, f)$ 到 K 的自同构羣的一个子羣之上的同态，一般說来，并不知道这个子羣是否包有 K 的內自同构羣；这个同态的核是 $GU_n(K, f)$． 对于 $u \in GU_n(K, f)$，关系式 (21) 指出乘子 r_u 必須属于 K 的中心 Z，而关系式 (22) 又指出 r_u 属于 Z 中被对合 J 保持不变的元素所組成的子域 Z_0（这个子域即是 Z，或者 Z 是它的一个二次可离扩张）． 因此映射 $u \to r_u$ 是从 $GU_n(K, f)$ 到 Z_0^* 的一个（阿倍尔）子羣 $M(f)$ 之上的同态；一般說来，关于这个子羣的知識我們知道的很少（参看第二章 § 13）；这个同态的核是 $U_n(K, f)$．

我們以 $P\Gamma U_n(K, f)$，$PGU_n(K, f)$，$PU_n(K, f)$ 分別表 $\Gamma U_n(K, f)$，$GU_n(K, f)$，$U_n(K, f)$ 在射影羣 $P\Gamma L_n(K)$ 中的自然映象，显然，位似变换 $x \to x\lambda$ 是以 $\lambda^J\lambda$ 为乘子的酉半类似变换，因此 $P\Gamma U_n(K, f) = \Gamma U_n(K, f)/H_n$；同样，一切中心位似变换都是酉类似变换而 $PGU_n \cong GU_n/Z_n$；最后，$U_n \cap Z_n$ 是由中心位似变换 $x \to x\gamma$ 具有性質 $\gamma^J\gamma = 1$ 者所組成；后面（第二章 § 3）将会看到一般地講羣 $U_1 = U_n \cap Z_n$ 是 U_n 的中心；我們有 $PU_n \cong U_n/U_1$．

設 $E \times E$ 上的自反形式 f_1 是形式 f 在一一綫性映射 v 之下的变形，我們立刻看出 $\Gamma U_n(K, f_1)$，$GU_n(K, f_1)$，$U_n(K, f_1)$ 分別是 $\Gamma U_n(K, f)$，$GU_n(K, f)$，$U_n(K, f)$ 在 $\Gamma L_n(K)$ 的內自同构 $s \to v^{-1}sv$ 之下的变形． 此外，如果 α 是 K 的一个（对于 J 的）对称元素或反对称元素，則 $\Gamma U_n(K, \alpha f) = \Gamma U_n(K, f)$，$GU_n(K, \alpha f) = GU_n(K, f)$ 以及 $U_n(K, \alpha f) = U_n(K, f)$．

当 K 是域而 f 是交錯形式时，就用“辛”来代替上面定义里的“酉”． 因为任意两个具相同秩 n（偶数）的交錯形式是等价的，我們就不在相应的羣中将形式 f 写出，而写 $\Gamma Sp_n(K)$，$GSp_n(K)$ 及 $Sp_n(K)$（对于相当的射影羣亦有类似的符号）． 当任意两个等秩的形式等价时，我們在酉羣的符号里也把形式 f 略去不記（例如，当 $J \neq 1$ 而 K 是有限域时，就是这样的）．

当K是特征数$\neq 2$的域而f是对称形式时，我們就用"正交"来代替"酉"并把相当的羣記作$\Gamma O_n(K,f)$，$GO_n(K,f)$及$O_n(K,f)$（对于射影羣也有相当的符号）；特征数为2的域上的正交羣定义与这里的完全不同，我們将在§16中給出它們的定义。

§10. 迹 形 式

設f是$E\times E$上的厄米特形式，我們設f是一个迹形式，如果对于一切$x\in E$，$f(x,x)$都是K中的"迹"，这就是說都可以表成形状$\lambda+\lambda^J$，$\lambda\in K$. 由于$\gamma=f(x,x)$是对称元素，所以当K的特征数$\neq 2$时，这个条件一定成立，因为这时只要取$\lambda=\frac{1}{2}\gamma$即可. 当$K$的特征数为2而中心$Z$中对称元素所組成的子域$Z_0$与$Z$相异时（这时对合$J$称为第二类对合，例如当$K$是域而$J$异于单位自同构时就是这种情形），这个条件也成立. 实际上，这时存在一个$\gamma\in Z$使得$\gamma^J\neq\gamma$，于是$\alpha=\gamma+\gamma^J\neq 0$；如果$\mu$是$K$中任意一个对称元素，因为$\alpha\in Z$，我們有$(\alpha^{-1}\mu)^J=\alpha^{-1}\mu$，因此$\mu=\gamma(\alpha^{-1}\mu)+\gamma^J(\alpha^{-1}\mu)^J=(\gamma\alpha^{-1}\mu)+(\gamma\alpha^{-1}\mu)^J$. 反之，当$K$是（特征数为2的）域而$J$是单位自同构时，除了0以外任何对称元素都不是"迹"；因此迹形式就是交錯形式. 我們可以举出一个对于中心的秩为4的体来，其中有不是迹的对称元素存在（例如，参看J. 狄多涅(Dieudonné)[4]，73頁）.

对于非迹形式的酉羣的研究基本上可以化为对于迹形式的酉羣的研究(J. Dieudonné[16]). 实际上，如果f是$E\times E$上的非迹自反形式，考察E中使得$f(x,x)$是"迹"的那些向量x所組成的集合V；显然V是E的一个子空間. 令$V_1=V\cap V^0$（全迷向空間），并設V_2和V_3分别是V_1对于V和V_0的补空間. 我們可以証明，有$(V_2+V_3)^0=V_2^0\cap V_3^0$的一組基$(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 2q}$存在使得指数$i\leqslant q$的向量$e_i$組成$V_1$的一組基，而且有$f(e_i,e_{q+j})=0$，$i\neq j$；$f(e_i,e_{q+i})=1$，$1\leqslant i\leqslant q$. 設$V_4$是由$e_{q+i}(1\leqslant i\leqslant q)$所生成的子空間，則$E$是$V_1$，$V_2$，$V_3$，$V_4$的直接和. 分析酉变换$u$所应該适合的条件就可以証明羣$U_n(K,f)$有一个正規羣列

$$U_n \supset \Gamma_0 \supset \Gamma \supset \{1\},$$

使得 Γ_0/Γ 和 Γ 是阿倍尔羣而商羣 U_n/Γ_0 与酉羣 $U_m(K, f_2)$ 同构，其中 f_2 是 f 在 $V_2 \times V_2$ 上的限制而 m 是 V_2 的維数；根据选法，f_2 是一个非退化的迹形式.

对于 §8 中討論正交基的存在性时所擱置的一个情形，即 K 是特征数 $= 2$ 的域而 f 是非交錯的对称形式这个情形，也可以将空間 E 作同样的分解. 实际上（采用上面的記号），这时 $V \cup V^0$ 不能是整个空間；如果 $a \notin V \cup V^0$，a 就不是迷向的，因而与 a 正交的超平面 H 中就存在一个非迷向向量（否則我們就有 $H=V$ 而 $a \in V^0$）；从而如同 §8 应用归納法仍然可以得到一組正交基（A. Albert[1]）.

§ 11. 迹形式的性質

以下我們永远假定所研究的自反形式 f 是**非退化的迹形式**. 对于这样一个形式（假定它是厄米特形式），首先有下面的引理：**对于 E 中任何一个迷向向量 a 和包有 a 的任何一个非迷向平面 P；P 中都存在另外一个迷向向量 b，使得 $f(a, b) = 1$.** 实际上，只要选 P 中一个向量 c 使得 $f(c, a) = \alpha \neq 0$ 并求得 $b = c + a\xi$ 使得 $f(b, b) = 0$ 即可；我們求得方程 $\alpha\xi + \xi^J\alpha^J = -f(c, c)$，因为 $-f(c,c) = \lambda + \lambda^J$，所以只要取 $\xi = -\alpha^{-1}\lambda$ 即得 $f(a,b) = \alpha^J \neq 0$；再将 b 乘以 α^{-J} 就得到問題的答案.

从这个結果可以推出下面两个結果：

1）对于 E 的任何一个全迷向子空間 V，都存在另一个与 V 有相同維数的全迷向子空間 W，使得 $V \cap W = \{0\}$ 而且 V 中非零向量都不与 W 正交. 此外，对于任何一对适合这个条件的同一維数 P 的全迷向子空間，都存在 V 的一組基 $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ 和 W 的一組基 $(e_{p+i})_{1 \leqslant i \leqslant p}$，使得 $f(e_i, e_{p+j}) = \delta_{ij}$.

只要对于 V 的維数用归納法并应用上述引理，即可証明这个結果. 我們注意，如果 p 是 f 的**指数** ν，那么对于維数 ν 的两个全迷向子空間 V 和 W，$V \cap W = \{0\}$ 就推出 V 中非零向量都不与 W 正交.

2）**当 $\nu \geqslant 1$ 时，存在 E 的一組由迷向向量所組成的基.** 实际

上，先在E中取一个迷向向量a，再在E中取一个迷向向量b使得$f(a, b) = 1$，那么由a和b所确定的平面P是非迷向的；設$(c_i)_{1\leqslant i\leqslant n-2}$是$P^0$的一組基，我們立刻看到$f(b, a + c_i) \neq 0$，于是在由$b$和$a + c_i$所确定的平面中就存在一个迷向向量$e_i$使得$f(b, e_i) = 1$. 因而$a$, b和$e_i(1 \leqslant i \leqslant n-2)$就組成所要求的一組基.

E的两个同一維数的子空間V和W，一般說来不能用一个酉变换将其中之一变到另外一个；这样变换存在的条件由下面的基本定理所給出，这个定理是維特 (E. Witt)[1] 証明的(也可参看 G. Pall[1] 和 I. Kaplansky[1])：

存在一个酉变换$u \in U_n(K, f)$使得$u(V) = W$的充分必要条件是f在$V \times V$和$W \times W$上的限制是等价的.

显然只需要証明条件的充分性. 設v是从V到W之上的一个綫性映射使得$f(v(x), v(y)) = f(x, y)$, $x \in V$, $y \in V$，問題可以化为証明v可以拓展成一个綫性变换$u \in U_n$. 将要敘述的証明是薛佛侶 (C. Chevalley)[1] 給出的. 我們对V和W的維数m用归納法，将归納法假設应用于V的一个$m-1$維子空間U上，首先可以假定$v(x) = x$对一切$x \in U$. 然后我們来考察一个最大維数的子空間U_1，它包有U而具有性質：v可以拓展成$V + U_1$上的一个綫性映射w，使得$f(w(x), w(y)) = f(x, y)$对于$x, y \in V + U_1$而且使得$w(x) = x$对于$x \in U_1$. 将$V + U_1$改記作V，我們就可以假定$U_1 = U$，这就是說不可能将v拓展到一个子空間$V_1 \supset V$上，使得$f(v(x), v(y)) = f(x, y)$在$V_1 \times V_1$上而且在V_1中存在被v所不变而又不属于U的向量. 如果$U = V$，命题显然成立；因此我們可以假定$V = U + aK$而$a \notin U$；設$b = v(a) \notin U$. 还可以假定$V \neq E$，将v拓展到E的一个$m+1$維子空間上. 这需要而且只需要能找到$z \notin V$, $z' \notin W$适合下述条件：

(A) $z' - z$与U正交，$f(z, a) = f(z', b)$而$f(z, z) = f(z', z')$.

于是令$v(z) = z'$就把v拓展到$V + zK$上.

根据U的极大性，条件(A)不可能对$z'=z$成立，这就是說，如果$z=z'$与$b-a$正交，$z=z'$就属于V或属于W．由此推出，与$b-a$正交的超平面H包在V中或包在W中，这时一定有$m=n-1$．假定$H=V$成立，那么$f(a,b-a)=0$，于是$f(a,b)=f(a,a)=f(b,b)$；因而$f(b,b-a)=0$，由此推出$b\in H$，而$H=W$．

問題化为研究$V=W$与$b-a$正交的超平面H的情形，于是$b-a$是一个迷向向量而a和b以及U都与$b-a$正交．任取一个不属于V的z，置$z'=z+c+(b-a)\xi$，我們来确定c和ξ使得z和z'适合条件(A)．首先我們应該取c与U正交，而条件$f(z',b)=f(z,a)$給出$f(c,b)=-f(z,b-a)=\beta\neq 0$：因为$b\notin U$，所以存在$c\in U^0$使得$f(c,b)=\beta$；此外$c$不能与$a$正交，否則它就与$H=U+aK$正交，因而与$b$正交；于是$f(c,a)=\alpha\neq 0$．由此首先推出$f(z',b-a)=f(z,b-a)+f(c,b-a)=-f(c,a)=-\alpha\neq 0$，因而无論$\xi$是什么，都有$z'\notin H$．剩下还需要用方程$f(z',z')=f(z,z)$决定$\xi$，因$f$是迹形式，故可写

$$\alpha\xi+\xi^J\alpha^J=f(z+c,z+c)-f(z,z)=\lambda+\lambda^J,$$

再取$\xi=\alpha^{-1}\lambda$就行了．

在討論維特定理的推論之前，我們先指出：用一个类似变換将V变到W上的充分必要条件是f在$V\times V$上的限制等价于f在$W\times W$上的限制乘以乘子羣$M(f)$(§ 9)中的一个元素μ．

由 Witt 定理推出下列諸結果：

3) 如果V和W是同一維数的全迷向子空間，則有一变換$u\in U_n(K,f)$存在使得$u(V)=W$；

4) E的任何全迷向子空間V都包含在一个最大維数ν的全迷向子空間之中．实际上，如果V的維数$r<\nu$；設W是一个維数ν的全迷向子空間而V_1是W的一个維数r的子空間，則有$u\in U_n(K,f)$存在使得$u(V_1)=V$，那么$u(W)$就是包有V的一个最大維数ν的全迷向子空間；

5) 設V是一个最大維数ν的全迷向子空間，而W是一个維

数 ν 的全迷向子空間使得 $V \cap W = \{0\}$，則 $M = V + W$ 是一个 2ν 維的非迷向子空間，因为与 V 正交的迷向向量一定包在 V 之中（§7）. 此外，基于同样的理由，M^0 是一个不包含迷向向量的 $n-2\nu$ 維的子空間. 如果 V_1，W_1 是两个維数 ν 的全迷向子空間而 $V_1 \cap W_1 = \{0\}$，那么就存在一个酉变换 u 使得 $u(V) = V_1$ 及 $u(W) = W_1$，因为这可以从維特定理及 $V + W$ 和 $V_1 + W_1$ 在 1) 中所描写的类型的基的存在性推出；又因为 $u(M^0) = M_1^0$，所以 f 对于 $M^0 \times M^0$ 和 $M_1^0 \times M_1^0$ 的限制是等价的. f 在 $M^0 \times M^0$ 上的限制除差一个等价关系之外唯一确定，称为形式 f 的旣約絕对非迷向形式. 两个厄米特形式等价的充分必要条件是它們有相同的指数而且它們的旣約絕对非迷向形式等价.

設 K 是有序域（因之它的特征数为 0）而 f 是一个对称形式，那么元素 $c_i = 1/2(e_i + e_{i+\nu})$，$c_{i+\nu} = 1/2(e_i - e_{i+\nu})(1 \leqslant i \leqslant \nu)$ 組成 $M = V + W$ 的一組正交基而且 $f(c_i, c_i) = 1/2$ 及 $f(c_{i+\nu}, c_{i+\nu}) = -1/2$ 对 $1 \leqslant i \leqslant \nu$；将 M 的这組正交基补上 M^0 的一組正交組 $(c_i)(2\nu \leqslant i \leqslant n)$，我們就得到 E 的一組正交基；以 p 表使得 $f(c_i, c_i) > 0$ 的指数 i 的个数，我們就看出 $\nu \leqslant \min(p, n-p)$. 如果 K 又是欧氏域，因为 M^0 不包含迷向向量，所以有 M^0 的基使得 $f(c_i, c_i) = 1$ 对 $i > 2\nu$ 或 $f(c_i, c_i) = -1$ 对 $i > 2\nu$；于是这时我們有 $\nu = \min(p, n-p)$. 这些結果显然可以推广到 f 是厄米特形式而 K 是一个有序域上的二次扩张或广义四元数体的情形.

最后我們指出，維特定理和本节中的引理 1), 2), 3), 4) 当 f 是交錯形式时，仍然成立.

§ 12. 酉羣中的拟对称和平延

$U_n(K, f)$ 或 $GU_n(K, f)$ 或 $\Gamma U_n(K, f)$ 中变换的分类問題在于寻求判断这些羣之一里的两个变换 u, v 在这个羣之中共軛的判定准則；我們只准备研究这个問題的一些特殊情形，斯普灵格 (T. Springer)[1] 和賈考宾斯基 (H. Jacobinski)[1] 曾較一般地研究过这个問題.

首先我們注意，如果$\Gamma U_n(K, f)$的一个变换将E的一个向量子空間V（整体地）保持不变，它也将V的正交子空間V^0（整体地）保持不变。当V是非迷向子空間时，这样一个变换由它在两个互补子空間V, V^0上的限制所完全确定，而这种变换的全体組成一个羣，与$\Gamma U_n(K, f_1) \times \Gamma U_n(K, f_2)$中对应于相同的自同构和乘子的$v$和$w$构成的元素对$(v, w)$所組成的子羣同构（$f_1$和$f_2$分别是$f$在$V \times V$和$V^0 \times V^0$上的限制，$p$是$V$的維数）。

現在我們研究$\Gamma U_n(K, f)$中将V的每一个元素都保持不变的变换，这样的一个变换u一定屬于$GU_n(K, f)$，又如果V是非迷向的，它还一定屬于$U_n(K, f)$。令$V_1 = V \cap V^0$，而U是V_1在V中的补空間，則u完全由它在非迷向子空間U^0上的限制所完全确定，而在U^0中u将V_1中一切元素都保持不变。当$V_1 = \{0\}$时（这就是說，V是非迷向的），这种变换u組成一羣与$U_{n-p}(K, f_2)$同构（采用与上面同样的記号）。另外一个极端情形为V是全迷向的，我們只研究V是最大維数ν的全迷向子空間而$2\nu = n$的情形。設W是与V互补的另外一个全迷向子空間，而$(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 2\nu}$是$E$中如§11，1)中所描写的类型的一組基；令$u(x) = x + v(x)$，則关系式$f(u(x), u(y)) = f(x, y)$首先給出$f(x, v(y)) = 0$对$x \in V$, $y \in W$，換言之，v是一个将V映到0而将W映到V之中的綫性变換。对于$x \in W$和$y \in W$，立刻得到关系式$f(x, v(y)) + f(y, v(x))^J = 0$（对于一个厄米特形式$f$）；因此$u$对于基$(e_i)$的矩陣就是下列形状的矩陣

$$\begin{pmatrix} I & S \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

其中${}^tS = -S^J$（換言之，S是一个ν級的反厄米特矩陣，而它的秩是$\leqslant \nu$的任意数）；如果从一个反厄米特形式f出发，就得到S是厄米特矩陣。因此$U_n(K, f)$中将V的每个元素都保持不变的子羣这时与一切ν級反厄米特（或厄米特）矩陣所組成的加法羣同构。这种酉变換我們称之为特殊变換。易見，这样的两个变換u_1, u_2在$U_n(K, f)$中共軛的充分必要条件是它們的对应矩陣S_1和S_2

(或者是，W_1 及 W_2 中的反厄米特形式 $f(x, v_1(y))$ 及 $f(x,v_2(y))$)) 等价.

我們再特别研究将一个超平面 V 中一切元素都保持不变的酉变换，这就是酉伸縮变换和酉平延(§2). 如果 V 是非迷向的而 a 是与 V 正交的一个向量，我們就一定有 $u(a)=a\alpha$ 而 $\alpha^I f(a, a)\alpha = f(a, a)$；这样一个变换称为对于超平面 V 的拟对称. 这时总存在异于单位元素的拟对称：如果 K 的特征数 $\neq 2$，只要取 $\alpha = -1$ 就行(对于超平面 V 的对称). 反之，如果 K 的特征数 $=2$，我們有 $f(a, a)=\lambda+\lambda^I$；这时取 $\alpha=\lambda^{-1}\lambda^I$，有 $\alpha^I\lambda\alpha=\lambda$ 及 $\alpha^I\lambda^I\alpha=\lambda^I$，因为 $\lambda^I\neq\lambda$，故由此推出我們的断言. 注意，在正交羣 $O_n(K,f)$ 中(K 的特征数 $\neq 2$)，超平面 V 的异于单位元素的拟对称只有对于 V 的对称，而辛羣 $Sp_n(K)$ 是仅有的沒有拟对称的酉羣(因为这时沒有非迷向超平面).

至于超平面 V 的酉平延，只在超平面 V 迷向而平延的向量 a 与 V 正交时才存在；因此平延的形状是 $x\to x+a\lambda f(a, x)$，其中 λ 是反对称的，如果 f 是厄米特形式；λ 是对称的，如果 f 是反厄米特形式. 如果将 a 易之以 $a\mu^{-1}$，λ 就易之以 $\mu\lambda\mu^I$. 分别对应于元素 λ 和 λ' 的两个平延在 U_n 中共軛的充分必要条件是 $\lambda'=\mu^I\lambda\mu$ 对于一个适当的 μ. 我們注意，只要 E 中有迷向向量存在，酉平延就存在，但这需要除开正交羣 $O_n(K,f)$ 这个情形(K 的特征数 $\neq 2$)，因为这时 K 中沒有 $\neq 0$ 的反对称元素存在.

§13. 酉羣中的半对合及其中心化子：第一种情形

設 u 是 $\Gamma U_n(K,f)$ 中对于 K 的自同构 σ 的半对合；設 $u^2(x)=x\gamma$ 及 $f(u(x), u(y))=e(f(x, y))^\sigma$. 将关系式(1)，(2)，(21)和(22)重新写出如下：

$$\gamma^\sigma=\gamma,\ \xi^{\sigma^2}=\gamma^{-1}\xi\gamma,\ \xi^{\sigma I}=e\xi^{I\sigma}e^{-1},\ e^I=e. \tag{24}$$

此外，用两种方法計算 $f(u^2(x), u^2(y))$，即得

$$\gamma^I\gamma=ee^\sigma. \tag{25}$$

在本节中，我們假定 γ 不是形状 $\lambda\lambda^\sigma$ 的元素(§3 中的 A))，那

么造K的二次扩张 $K_0=K(\rho)$，而 $\rho^2=\gamma$ 及 $\eta\rho=\rho\eta^\sigma$ 对一切 $\eta\in K$；对于 $\zeta=\xi+\rho\eta\in K_0$ 及 $x\in E$，令 $x\zeta=x\xi+u(x)\eta$，于是E就成了 K_0 上的 $n/2$ 維的向量空間；我們把这个向量空間記作 E_0. 不难看出E的对偶 E^* 与 E_0 的对偶 E_0^* 之間存在一个一一对应 $x'\leftrightarrow x'_0$ 使得

$$\langle x'_0, x\rangle=\langle x', x\rangle+\rho\langle x', u(x)\rangle^\sigma\gamma^{-1} \tag{26}$$

对一切 $x\in E$. 此外，令 $\rho^J=\rho e^\sigma\gamma^{-1}$，那么根据(24)和(25)可以驗証，把对合 J 扩张到了 K_0 上. 于是(26)指出对应于(与形式 f 相关的)对射变换有一个从 E_0 到 E_0^* 中的映射 φ_0，它由下列公式所确定:

$$\langle\varphi_0(x), y\rangle=\langle\varphi(x), y\rangle+\rho\langle\varphi(x), u(y)\rangle^\sigma\gamma^{-1}. \tag{27}$$

因而，基于(24)和(25)，我們就有 $\varphi_0(x\zeta)=\zeta^J\varphi_0(x)$ 对一切 $\zeta\in K_0$；换言之，φ_0 是一个对射变换. 此外，如果 ${}'\varphi=\varepsilon\varphi$ 而 $\varepsilon=\pm 1$，我們还有 ${}'\varphi_0=\varepsilon\varphi_0$，因为从(27)式推出

$$\langle\varphi_0(x), y\rangle^J-\varepsilon\langle\varphi_0(y), x\rangle\in\rho K$$

只要 x 和 y 属于 E；可是第一項是 x 的一个(在 K_0 上的)綫性形式，因此只有它恆等于零时，它的値才能永远在 ρK 中.

从而与 φ_0 相应的自反形式 $f_0(x, y)$ 由下列公式((27)式的改写)給出:

$$f_0(x, y)=f(x, y)+\rho(f(x, u(y)))^\sigma\gamma^{-1}. \tag{28}$$

現在寻求与半对合 u 射影可换的半类似变换所組成的羣 H，即求对合 $\bar{u}\in P\Gamma U_n$ 在射影羣 $P\Gamma U_n$ 中的中心化子(参看§4). 設 v 是这样一个变换，并假定 v 对应于 K 的自同构 τ，$vu=uv\cdot a(a\in K)$ 而且由此式所导出的(3)和(4)两个条件成立；此外，我們有 $\varphi(v(x))=h\cdot\check{v}(\varphi(x))$，其中 h 是K的一个对称元素. 那么(§4)，我們可以将 τ 扩张成 K_0 的一个自同构使得 v 成为对应于这个自同构的 E_0 的直射变換. 这样做了以后，就由公式(28)推出 $f_0(v(x), v(y))-h(f_0(x, y))^\tau\in\rho K$ 对一切 $x, y\in E_0$；可是当 x 固定时，这个公式对于 y 是半綫性的，所以只有它是零时所取的値才能全在 ρK 中. 因此 v 属于羣 $\Gamma U_{n/2}(K_0, f_0)$. 反之，这个羣的一

个直射变换 v 亦适合条件，如果 v 所对应的自同构 τ 将 K（全局地）保持不变而且使得 $\rho^{\tau} = \rho a$（而 $a \in K$）同时 v 的乘子属于 K. 我們注意，由这些条件所定义的 $\Gamma U_{n/2}(K_0, f_0)$ 的子羣 H 包有酉羣 $U_{n/2}(K_0, f_0)$ 作为它的正规子羣.

§14. 酉羣中的半对合及其中心化子：第二种情形

仍采用 §13 的記号，現在假定 $\gamma = \lambda\lambda^{\sigma}$；将 u 易之以 $u\cdot\lambda^{-1}$（这只相当于将 u 所对应的自同构和乘子加以改变）就可以假定 $\gamma = 1$，由此推出 $\sigma^2 = 1$ 以及 $ee^{\sigma} = 1$. 我們分别研究 σ 是单位自同构和不是单位自同构两种情形：

A) σ 是单位自同构，而由此推出 $e^2 = 1$. 我們再分别研究下面三种情形：

A1) K 的特征数 $\neq 2$ 而 $e = 1$；这时 u 是 $U_n(K, f)$ 中的一个对合. 我們立刻可以驗証 U^+ 中每一个向量都与 U^- 中每一个向量正交，这就推出 U^+ 和 U^- 是非迷向的而且它們互相正交. 反之，对于任意一对互补而且互相正交的非迷向子空間 V 和 W，綫性变换 u 具有性质 $u(x) = x$ 在 V 中而 $u(x) = -x$ 在 W 中者是 $U_n(K, f)$ 中的对合.

現在設 v 是一个半类似变换，对应于 K 的自同构 τ 以及乘子 h，使得 $vu = uv\cdot a$；条件(4)給出 $a^2=1$，換言之，$vu=\pm uv$；只有在 U^+ 和 U^- 的維数相等时，我們才能有 $vu = -uv$. 設 H 是与 u 射影可換的 $v \in \Gamma U_n$ 所組成的羣，而 H_0 是 u 在 ΓU_n 中的中心化子，那么 H_0 在 H 中的指数是 1 或 2，而 H_0 与直乘积 $\Gamma U_p(K, f_1) \times \Gamma U_{n-p}(K, f_2)$（$p = \dim U^+$ 而 f_1 和 f_2 分别是 f 在 $U^+ \times U^+$ 及 $U^- \times U^-$ 上的限制）的一个子羣同构，这个子羣由具相同的自同构及相同的乘子的 $v_1 \in \Gamma U_p(K, f_1)$ 和 $v_2 \in \Gamma U_{n-p}(K, f_2)$ 所凑成的元素对 (v_1, v_2) 所組成；

A2) K 的特征数 $\neq 2$ 而 $e = -1$；这时由关系式 $f(u(x), u(y)) = -f(x, y)$ 推出 U^+ 和 U^- 是互补的全迷向子空間，因之 $n = 2m$ 而 $\dim U^+=\dim U^-=m=\nu$. 反之，如果 $n = 2\nu$ 而 V 和 W

是两个极大維数 ν 的互补全迷向子空間，那么由 $u(x)=x$ 对 $x\in V$ 及 $u(x)=-x$ 对 $x\in W$ 所定义的（綫性）直射变换 u 就有性質 $f(u(x), u(y))=-f(x, y)$ 对一切 $x, y\in E$.

如果 $vu=uv\cdot a$ 对 $v\in \Gamma U_n$，我們仍然有 $a^2=1$，因此可以和上面一样局限于研究 u 在 ΓU_n 中的中心化子 H_0. 如果 $v\in H_0$ 对应于自同构 τ 及乘子 h，那么关系式 $vu=uv$ 指出 $v(U^+)=U^+$，$v(U^-)=U^-$，而关系式 $f(v(x), v(y))=h(f(x, y))^\tau$ 对 $x\in U^+$ 及 $y\in U^-$ 指出 v 在 U^- 中的値完全由它在 U^+ 中的値所确定. 因此属于 H_0 的直射变换 v 在 U^+ 上的限制是对应于自同构 τ 的直射变换使得自同构 τJ 和 $J\tau$ 只差一个 K 的內自同构，反之亦然；于是 H_0 可以看作是 $\Gamma L_{n/2}(K)$ 中由对应于具上述性質的自同构的直射变换所組成的子羣. 我們指出，H_0 包有一般綫性羣 $GL_{n/2}(K)$ 作为其正規子羣；

A3) K 的特征数为 2 而 $e=1$. 这时（§3）有 $u(x)=x+w(x)$，而 $w(E)\subset w^{-1}(0)=U$；将 u 是酉变换的条件写出，我們立刻看到 $w(E)$ 应該与 U 正交，又因为 $w(E)$ 与 U^0 有相同的維数，所以 $w(E)=U^0\subset U$ 是全迷向的；反之也显然成立. 設 $v\in \Gamma U_n(K, f)$ 与 u 射影可换，它就属于 u 在 $\Gamma U_n(K, f)$ 中的中心化子 H，因为 $a^2=1$；于是一定有 $v(U)=U$ 及 $v(U^0)=U^0$；以 V 表对于 U 而言与 U^0 互补的一个（非迷向）子空間；如果 $p=\dim U^0$，那么 V^0 就是一个 $2p$ 維的包有 U^0 的非迷向子空間，因此 V^0 中存在一个对于 V^0 而言与 U^0 互补的 p 維全迷向子空間.

設 H_1 是由 H 中适合条件 $v(x)\equiv x(\bmod U)$ 的 v 对一切 $x\in E$ 及 $v(y)\equiv y(\bmod U^0)$ 对一切 $y\in U$ 者所組成的 H 的正規子羣. 我們首先知道，如果 $V\neq\{0\}$，v 就是綫性的而且具乘子 1，换言之，属于 $U_n(K, f)$. 此外，可以写 $v(x)=x+v'(x)$ 而 $v'(x)\in U$；写出 $f(v(x), v(y))=f(x, y)$ 对 $x\in W$ 及 $y\in U^0$ 就有 $f(x, v(y)-y)=0$，又因为 $W^0=V+W$ 及 $v(y)-y\in U^0$，所以 $v(y)=y$ 在 U^0 中. 当 $V=\{0\}$ 时，我們同样看到 $v(y)=yh$ 在 U^0 中，h 是 v 的乘子（那么它属于 K 的中心）.

設 H_2 是 H_1 将 U 中一切元素都保持不变的子羣；将 V 中一切元素都保持不变的变换 $v \in H_2$ 完全由它对于 $V^0 = U^0 + W$ 的限制所确定，而且是这个空間里将全迷向子空間 U^0 的一切元素都保持不变的酉变换；因此它是一个特殊变换(§12)，这就証明了 H_2 是一个阿倍尔羣而与 p 阶反厄米特矩陣(或厄米特矩陣)所組成的加法羣同构，如果 f 是厄米特形式(或反厄米特形式).

另一方面，羣 H_1/H_2 与 H_1 中的变换对于子空間 U 的限制所組成的羣 H_1' 同构. 如果 $V \neq \{0\}$，令 $v(y) = y + v''(y)$ 而 $v''(y) \in U^0$ 对一切 $y \in V$；此外，令 $v(x) = x + v'(x)$ 而 $v'(x) \in U$ 对一切 $x \in W$，于是关系式 $f(v(x), v(y)) = f(x, y)$ 給出 $f(v'(x), y) + f(x, v''(y)) = 0$；对于从 V 到 U^0 之中的一切綫性映射 v''，在 V 和 $V^0 = U^0 + W$ 之中选取基之后(例如，在 V 中选取一組正交基或辛基，而在 V^0 中选取一組如 §11,1) 中所説的基)，我們可以証明存在从 W 到 V 之中的一个而且是唯一的一个綫性映射 v' 适合前面的条件. 这就証明了 H_1/H_2 与 p 行 $n-2p$ 列的矩陣所組成的加法羣同构，即与 $K^{p(n-2p)}$ 同构. 如果 $V = \{0\}$，我們有 $v(y) = yh$ 在 $U^0 = U$ 中，可以取 $v(x) = x$ 在 W 中，因此 H_1/H_2 与 K 的中核的乘法羣 Z^* 同构.

最后确定 H_1/H_2. 对于一切 $v \in H$，令 $v(x) = v_1(x) + v'(x)$ 而 $v_1(x) \in W$ 及 $v'(x) \in U$ 对一切 $x \in W$，再令 $v(y) = v_2(y) + v''(y)$ 而 $v_2(y) \in V$ 及 $v''(y) \in U^0$ 对一切 $y \in V$. 定义直射变换 $\tilde{v}$ 如下：$\tilde{v}(x) = v_1(x)$ 对 $x \in W$，$\tilde{v}(y) = v_2(y)$ 对 $y \in V$ 及 $\tilde{v}(z) = v(z)$ 对 $z \in U^0$. 我們可以驗証 $\tilde{v}$ 属于 $\Gamma U_n(K, f)$($\tilde{v}$ 与 v 对应相同的自同构 τ，同时与 v 有相同的乘子 h) 以及 v 与 u 交换的充分必要条件是 $\tilde{v}$ 与 u 交换，那么就定义了一个从 H 到 H 的子羣 $\tilde{H}$ 上的一个表示 $v \to \tilde{v}$；因为这个表示的核是 H_1，所以 $\tilde{H}$ 与 H/H_1 同构. 可是，如果对于 $V^0 = U^0 + W$ 取一組 §11,1) 中所描写的基，我們就証明了 $\tilde{v}$ 对于 V^0 的限制的矩陣形状是 $\begin{pmatrix} \check{A}' & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$，其中 A 是一个 p 級方陣；再者，u 对于 V^0 的限制的矩陣形状是 $\begin{pmatrix} I & S \\ 0 & I \end{pmatrix}$，其中 S

是 p 級反厄米特(或厄米特)矩陣,如果 f 是厄米特形式(或反厄米特形式). u 与 $\tilde{v}$ 在 V^0 中交換的条件可以写作 ${}^tA^JSA = hS^\tau$, 換言之, $\tilde{v}$ 对于 V^0 的限制应該属于 $\Gamma U_p(K, S)$. 此外, $\tilde{v}$ 对于 V 的限制应該属于 $\Gamma U_{n-2p}(K, f_1)$, f_1 是 f 对于 $V \times V$ 的(非退化的)限制. 最后 $\tilde{H} \cong H/H_1$ 同构于 $\Gamma U_{n-2p}(K, f_1) \times \Gamma U_p(K, S)$ 中具相同自同构和相同乘子的元素对所組成的子羣. 我們注意,对应于 S 的自反形式是非退化的但可能不是迹形式(参看 § 10).

B) σ 不是单位自同构. 以 K_1 表 K 中被 σ 所保持不变的元素所組成的子体;我們注意,一般說来 K_1 不被 J(整体地)保持不变. 这时 E 中具性質 $u(x) = x$ 的 x 組成的集合 U^+ 是 E 对于 K_1 的一个子空間, 其維数是 n 而 U^+ 在 K_1 上的基也是 E 在 K 上的基(§ 3). 可是,有 $f(x,y) = e \cdot f(x, y)^\sigma$ 对 $x \in U^+$ 及 $y \in U^+$, 将 x 易作 $x\xi$ 而 $\xi \in K_1$,我們就推出 $\xi^J = e\xi^{J\sigma}e^{-1}$; 因此,如果 $e = \pm 1$, K_1 就整体地被 J 保持不变. 我們将看到,将形式 f 乘以一个适当的对称元素或反对称元素,总可以化到 $e = 1$ 的情形去. 首先假定 $r = 1 + e \neq 0$, 那么 $r^J = r$ 而 $r^\sigma = re^{-1}$,如令 $e = r^{1-\sigma}$; 如果我們令 $g(x, y) = r^{-1}f(x, y)$,那么 g 就是对于对合 $\xi \to \xi^T = r^{-1}\xi^J r$ 的一个厄米特形式(或反厄米特形式),如果 f 是对于 J 的厄米特形式(或反厄米特形式)而且有 $g(u(x), u(y)) = g(x, y)^\sigma$. 还需要考察 $e = -1$ 的情形,这时 K 的特征数 $\neq 2$, 于是 $K = K_1(\rho)$ 而 $\rho^\sigma = -\rho$; 如果令 $r = \rho^J \pm \rho$,那么至少对于这两个符号之一 r 是 $\neq 0$ 的, 我們就有 $r^J = \pm r$ 以及 $r^\sigma = -r$, 由此仍有 $e = r^{1-\sigma}$, 因之可以象上面一样进行下去.

以下假定 $e = 1$. 于是对于 $x \in U^+$ 及 $y \in U^+$ 我們有 $f(x, y) = (f(x,y))^\sigma$,因而 $f(x,y) \in K_1$ 而 f 是 $U^+ \times U^+$ 上的一个非退化的自反形式,因为 U^+ 在 K_1 上的一組基是 E 在 K 上的基.

为了研究 $\Gamma U_n(K, f)$ 中与 u 射影可換的变換 v, 根据 § 4 总可以将 v 乘上一个 K 中非零元素而化为 $vu = \pm uv$ 的情形, 这时 K_1 就被对应于 v 的 K 的自同构 τ(整体地)保持不变. 我們分别研究以下两种情形:

B1) K 的特征数 $\neq 2$. 这时有 $K = K_1(\rho)$ 而 $\rho^\sigma = -\rho$, 又因为从(24)有 $\rho^{\sigma J} = \rho^{J\sigma}$, 所以 $\rho^{J\sigma} = -\rho^J$, 于是 $\rho^J = \rho\delta$ 而 $\delta \in K_1$[1]. 我們仅限于研究 u 在 $\Gamma U_n(K, f)$ 中的中心化子 H_0, 它是 ΓU_n 中那些具性質 $vu = \pm uv$ 的 v 所組成的羣H的一个指数 1 或 2 的子羣. 这时 v 对于 U^+ 的限制就是 $\Gamma U_n(K_1, f_1)$ 中的一个变换,其中 f_1 表 f 对于 $U^+ \times U^+$ 的限制;对应于 v 的 K_1 的自同构 τ 应該适合 §4 的条件(5)和(6); 此外, 如果 h 是 v 的乘子(它必需属于 K_1),我們就有 $\rho^{\tau J} = h\rho^{J\tau}h^{-1}$, 因而有条件

$$\alpha^{J\omega}\delta h = h^\omega \alpha \delta^\tau. \tag{29}$$

反之,如果这个条件成立,令 $v(x\rho) = v(x)\rho^\tau$(§ 4),我們就能够將 $v \in \Gamma U_n(K_1, f_1)$拓展成$E$ 的一个直射变换,而且可以驗証 $f(v(x\rho), v(y\rho)) = h(f(x\rho, y\rho))^\tau$ 对 $x \in U^+$, $y \in U^+$; 換言之, 我們有 $v \in \Gamma U_n(K, f)$,又因为 $U^- = U^+\rho$, 有 $v(U^-) = U^-$,由此推出 $v \in H_0$. 总之, H_0 与 $\Gamma U_n(K_1, f_1)$ 中其自同构 τ 和乘子 h 适合条件(5),(6)及(29)(对一个依賴于 v 的 $\alpha \in K_1$) 的半类似变換所組成的子羣同构. 注意这个子羣包有酉羣 $U_n(K_1, f_1)$ 作为其正規子羣;

B2) K 的特征数为 2. 这时有 $K = K_1(\theta)$ 而 $\theta^\sigma = \theta + 1$, 于是关系式 $\theta^{J\sigma} = \theta^{\sigma J}$, 从而給出 $\theta^{J\sigma} = \theta^J + 1$, 因此 $\theta^J = \theta + \delta$ 而 $\delta \in K_1$. 这时羣H是 u 在 $\Gamma U_n(K, f)$ 中的中心化子. 采用 B1) 中同样的約定, v 对于 U^+ 的限制就是 $\Gamma U_n(K_1, f_1)$ 的一个变換, 其自同构 τ 应該适合 §4 的条件(7)和(8); 此外,这个半类似变換的乘子 $h \in K_1$ 应該适合条件 $\theta^{\tau J} = h\theta^{J\tau}h^{-1}$, 由此推出

$$Dh + h(\lambda + \delta^\tau) + (\delta + \lambda^J)h = 0. \tag{30}$$

象 B1) 中一样,我們推出H与$\Gamma U_n(K_1, f_1)$ 中其自同构及乘子适合条件(7),(8)及(30) (对一切依賴于 v 的 $\lambda \in K_1$) 的半类似变換所組成的子羣同构;这个羣包有 酉羣 $U_n(K_1, f_1)$ 作为其正規子羣.

---

1) 如果有 $\rho^2 = \beta \in K_1$, 同时如果令 $\xi^\omega = \rho^{-1}\xi\rho$ 对 $\xi \in K_1$, 我們就一定有 $\xi^{\omega J} = \mu\xi^{J\omega}\mu^{-1}$ 对 $\xi \in K_1$ 而 $\mu \in K_1$, $\mu^J = \mu$, $\beta^\omega = \beta$, $\beta^J\beta = \mu\mu^\omega$, 于是 $\delta = \mu^{-1}\beta^J = \mu^\omega\beta^{-1}$.

§ 15. 可换的对射变换

我們已經定义过一个直射变换与另一个直射变换或一个对射变换射影可换的概念(§ 4 及 § 9). 現在設φ和ψ是从E到E^*上的对射变换，$\varphi^{-1}\psi$就是E的一个直射变换；我們說对射变换φ和ψ射影可换，如果$\varphi^{-1}\psi$是$\Gamma L_n(K)$中的一个半对合(§ 3)，换言之,存在一个$\gamma\in K$使得对一切$x\in E$

$$\varphi^{-1}(\psi(x))=\psi^{-1}(\varphi(x))\gamma. \tag{31}$$

显然这个定义不依賴于φ和ψ的次序. 此外，所定义的三个"射影可换"概念在下述意义下相关連:如果直射变换u(或对射变换θ)与两个对射变换φ,ψ射影可换,它就与直射变换$\varphi^{-1}\psi$射影可换;如果直射变换u与直射变换v及对射变换φ射影可换,它就与对射变换φv射影可换;最后,如果对射变换ψ与直射变换v及对射变换φ射影可换,它就与对射变换φv射影可换.

决定$P\Gamma L_n$中对合的中心化子(§ 4)或$P\Gamma U_n$中对合的中心化子問題是下面更一般問題的特殊情形，以后我們还会遇到这个問題的另外一些例子(第四章 § 8). 給了有限多个半对合$u_i\in\Gamma L_n(K)(1\leqslant i\leqslant q)$和自反对射变换$\varphi_j(1\leqslant j\leqslant r)$，而它們两两射影可换,求与这些$u_i(1\leqslant i\leqslant q)$及$\varphi_j(1\leqslant j\leqslant r)$射影可换的直射变换$v$. 前面的备注使我們可以仅限于研究$r=0$或$r=1$两种情形(将$r-1$个$\varphi_j$易之以直射变换$\varphi_1^{-1}\varphi_j$).

这样，如果K的特征数$\neq 2$，我們就可以应用 §§ 4，13 和 14 的結果而对半对合u_i的个数q用归納法来研究与这些u_i和φ射影可换的v所組成的羣H(J. Dieudonné[15]). 实际上,可分以下几种情形来考察u_1:

1) u_1适合 § 13 的条件；这时(采用这一节的記号)$u_i(2\leqslant i\leqslant q)$可以看作$\Gamma U_{n/2}(K_0, f_0)$中的$q-1$个半对合而$v$可以看作$\Gamma U_{n/2}(K_0, f_0)$中与这些$u_i(2\leqslant i\leqslant q)$射影可换的一个变换，而其自同构与乘子适合 § 13 中的条件;

2) u_1适合 § 14 中情形 B) 的条件；将$u_i(2\leqslant i\leqslant q)$乘以适

当的K中元素之后可以看作是$\Gamma U_n(K_1, f_1)$中的$q-1$个半对合，而v可以看作是$\Gamma U_n(K_1, f_1)$中与$u_i(2 \leqslant i \leqslant q)$射影可换的一个变换，而其自同构与乘子适合§14中指出的条件.

3) u_1适合§14中情形A1)的条件；如果U^+和U^-的維数不等，$u_i(2 \leqslant i \leqslant q)$就和一切$v \in H$同样都将这两个子空間全局地保持不变，而除了关于$v$的自同构和乘子的条件之外，就将問題化为对于每一个空間U^+和U^-的原来的問題，但这时只有$q-1$个半对合$u_i(2 \leqslant i \leqslant q)$了. 如果$U^+$和$U^-$的維数相等而$u_iu_1 = u_1u_i$对$2 \leqslant i \leqslant q$，那么除了把$H$轉移到一个指数2的子羣$H_0$之外，和上面是完全一样的. 最后，如果$u_2u_1 = -u_1u_2$，我們可以假定$u_iu_1 = u_1u_i$对$i \geqslant 3$（如果必要的話，就用$u_2u_i$代替$u_i$），这时有$u_2(U^+) = U^-$，$u_2(U^-) = U^+$，$u_i(U^+) = U^+$及$u_i(U^-) = U^-$对$i \geqslant 3$；轉移到$H$中一个指数2的子羣$H_0$，可以仅限于$vu_1 = u_1v$的情形，那么我們有$v(U^+) = U^+$，$v(U^-) = U^-$. 于是$v$对于子空間$U^+$的限制$v'$是$\Gamma U_{n/2}(K, f')$（其中$f'$是$f$对于$U^+ \times U^+$的限制）中的一个变换，它与$u_i(3 \leqslant i \leqslant q)$对于$U^+$的限制射影可换；反之，可以証明这样一个变换不一定能够拓展成H_0中一个直射变换v，可是当它属于$U_{n/2}(K, f')$而且与$u_i(i \geqslant 3)$可换时是一定可以的；

4) u_1适合§14中情形A2)的条件；如果$u_iu_1 = u_1u_i$对于$2 \leqslant i \leqslant q$，那么这些$u_i$就将空間$U^+$和$U^-$整体地保持不变，同时如果将$H$轉移到一个指数2的子羣$H_0$，我們还可以假定$v$也是这样的. 这时，$v$对于$U^+$的限制$v'$就是一个应該与$u_i(2 \leqslant i \leqslant q)$对于$U^+$的限制射影可换的直射变换；这样一个直射变换不一定能够拓展成H_0中的一个直射变换v，但是对于属于$GL_{n/2}(K)$而且与$u_i(i \geqslant 2)$射影可换的那些变换都是可以的.

最后，如果$u_2u_1 = -u_1u_2$，仍然可以假定$u_iu_1 = u_1u_i$对$i \geqslant 3$. 如果τ是对应于u_2的自同构，那么对于$x \in U^+$和$y \in U^+$定义了的半双綫性形式$f'(x, y) = f(u_2(x), y)$对于反自同构τJ是自反的. 于是，v对于U^+的限制v'应該属于$\Gamma U_{n/2}(K, f')$而且与

$u_i(3 \leqslant i \leqslant q)$ 对于 U^+ 的限制射影可換；这时逆命題也不永远成立，但是对于属于 $U_{n/2}(K, f')$ 而且与 $u_i(i \geqslant 3)$ 射影可換的那些 v' 都是成立的.

§16. 特征数等于 2 的域上的二次形式和正交羣

設 K 是特征数 $\neq 2$ 的域而 f 是 $E \times E$ 上的对称双綫性形式，我們把从 E 到 K 中的映射 $x \to Q(x) = f(x, x)$ 称为与 f 相关的二次形式. 我們立刻有

$$Q(\lambda x + \mu y) = \lambda^2 Q(x) + \mu^2 Q(y) + 2\lambda\mu f(x, y) \qquad (32)$$

其中 λ 和 μ 为 K 中任意元素，此式特別給出 $f(x,y) = 1/2(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$. 反之，如果从 E 到 K 之中的一个映射 Q 适合形状(32)的一个等式，其中 f 是 $E \times E$ 上的一个双綫性形式，我們立即推出 $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$，$f$ 是对称的以及 $Q(x) = f(x, x)$.

現在假定 K 是特征数等于 2 的域，我們說从 E 到 K 之中的一个映射 Q 是一个二次形式，如果它适合下面形状的一个等式

$$Q(\lambda x + \mu y) = \lambda^2 Q(x) + \mu^2 Q(y) + \lambda\mu f(x, y), \qquad (33)$$

其中 f 是 $E \times E$ 上的一个双綫性形式. 这个双綫性形式由 Q 完全确定，因为由(33)推出

$$f(x, y) = Q(x + y) + Q(x) + Q(y). \qquad (34)$$

此外，我們有 $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$，因此 $f(x, x) = 0$，即 f 是一个交錯形式. 設 $2p \leqslant n$ 是 f 的秩，并且設 E^0 是 E 的正交子空間，則 E^0 是 $n-2p$ 維的. 如果以 h 表 Q 对于 E^0 的限制，那么对于 $x \in E^0$ 及 $y \in E^0$，我們有

$$h(\lambda x + \mu y) = \lambda^2 h(x) + \mu^2 h(y). \qquad (35)$$

但是，$\xi \to \xi^2$ 是从 K 到它的子域 K^2 上的一个同构映射，因此公式(35)指出 h 是从 K 上向量空間 E^0 到 K^2 上向量空間 K 中的一个对于同构 $\xi \to \xi^2$ 的半綫性映射；于是这个映射的核 F 就是 E^0 的一个向量子空間，其維数 $q \leqslant n - 2p$，而这个映射的象 $M = h(E^0)$ 是 K(在 K^2 上)的一个子空間，其維数为 $n - 2p - q = d$;

因此我們有 $d \leqslant [K:K^2]$，特别当 K 是完备域时（这时 K 等于 K^2），$d = 0$ 或 $d = 1$；$n - q$ 称为 Q 的秩. 設 U 是在 E 中与 E^0 互补的一个 $2p$ 維子空間而 V 是 E^0 中对于 E^0 而言与 F 互补的一个 d 維子空間；如果我們在 U 中取一組辛基 $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 2p}$（对于形式 f），在 V 中任取一組基 $(e_i)_{2p+1\leqslant i\leqslant 2p+d}$ 而在 F 中任取一組基 $(e_i)_{2p+d+1\leqslant i\leqslant n}$，那么 $Q(x)$ 对于 $x = \sum_{i=1}^{n} e_i\xi_i$ 的表达式就是

$$Q(x) = {\sum_{i=1}^{p}}' (\alpha_i\xi_i^2 + \beta_i\xi_i\xi_{p+i} + \gamma_i\xi_{p+i}^2) + \sum_{i=2p+1}^{2p+d} \delta_i\xi_i^2,$$

而关系式 $\sum_{i=2p+1}^{2p+d} \delta_i\xi_i^2 = 0$ 推出 $\xi_i = 0$ 对 $2p + 1 \leqslant i \leqslant 2p + d$. 我們說 Q 是非退化的，如果 $q = 0$；这时 $d = n - 2p$ 称为 Q 的亏数；Q 称为有亏数的，如果 $d > 0$（对于一个奇数維的空間 E 永远是这个情形）. 以下永远假定二次形式 $Q(x)$ 是非退化的，于是它在 E^0 的任何一个补空間 U 上的限制都是无亏数的.

一个非零向量 $x \in E$ 称为奇异的，如果 $Q(x) = 0$；E 的一个子空間 V 称为奇异的，如果 $Q(x) = 0$ 对一切 $x \in V$；因为 $Q(x) \neq 0$ 在 E^0 的一切点 $x \neq 0$ 上，所以我們有 $V \cap E^0 = \{0\}$，因此 V 包含在 E^0 的一个补空間 E_1' 之中；根据(34)，V 是全迷向的（对于形式 f 而言），于是它的維数 $\leqslant p$. 我們把 E 的奇异子空間的最大維数称为 Q 的指数 ν，于是 $\nu \leqslant p$，同时可以选取一个与 E^0 互补的子空間 E_1，使它包有一个最大維数的奇异子空間；以下假定 E_1 是这样选定的一个子空間，我們約定 E_1 中的正交性永远是对于交錯形式 f 来說的. 那么存在和 §11 中引理相类似的引理：对于 E_1 中任何一个奇异向量 a 和任何一个包含 a 的非迷向平面 P，在 P 中都存在一个而且是唯一的一个奇异向量 b，使得 $f(a, b) = 1$. 如果 $f(a, c) \neq 0$，那么方程 $Q(c + a\xi) = 0$ 实际上可以写成 $f(a, c)\xi + Q(c) = 0$. 由此推出，如果将 E 易作 E_1 而将"全迷向"易作"奇异"，那么 §11 中的結果 1) 和 2) 仍然成立. 我們也注意，如果 $V \subset E_1$ 是奇异的而 W 是包在 V^0（V 在 E_1 中的正交子空間）

中的一个奇异子空間，那么 $V+W$ 仍然是奇异的；如果V的維数是极大值 ν，那么 V^0 中的一切奇异向量都含在V中.

設E和F是K上相同維数的向量空間，而u是从F到E上的一个同构，那么F上的形式 $x\to Q(u(x))$ 显然是一个二次形式，它称为用u将Q变形得到的；与它相关的交錯形式就是f在u之下的变形. 两个二次形式称为等价的，如果它們可以从一个变形到另一个；因此它們的秩相等，与它們相关的交錯形式的秩也相等，而它們的指数也相等.

等价問題只在少数情形解决了；我們局限于考察非退化的二次形式. 如果K是代数封閉域，因为二次方程在K中永远有解，所以我們有 $p=\nu$；此外因为 $d=0$ 或 $d=1$，所以在E中永远存在一組基 $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$，使得

$$Q(x)=\xi_1\xi_{p+1}+\cdots+\xi_p\xi_{2p},\quad 如果\ n=2p,$$

$$Q(x)=\xi_1\xi_{p+1}+\cdots+\xi_p\xi_{2p}+\xi_{2p+1}^2,\quad 如果\ n=2p+1.$$

当 $K=\mathbf{F}_q(q='2')$ 时，E中永远存在一組基 (e_i)，使得

$$Q(x)=\xi_1\xi_{p+1}+\cdots+\xi_p\xi_{2p}+\xi_{2p+1}^2,\quad 如果\ n=2p+1,$$

$$Q(x)=\xi_1\xi_{p+1}+\cdots+\xi_{p-1}\xi_{2p-2}+(\alpha\xi_p^2+\xi_p\xi_{2p}+\alpha\xi_{2p}^2),$$

如果 $n=2p$.

在第二种情形 $\alpha=0$ 或α使多項式 $\alpha X^2+X+\alpha$ 在K中不可約 (L. E. Dickson[1]，197—199 頁)，因此在第一种情形 $d=1$，$\nu=p$；在第二种情形 $d=0$，$\nu=p$ 或 $\nu=p-1$ 分别依賴于 $\alpha=0$ 或 $\alpha\neq 0$.

关于等价問題的其它結果，見 Cahit Arf[1].

E中一个直射变换u称为(对于二次形式Q的)正交半类似变换，如果它适合关系式

$$Q(u(x))=r_u(Q(x))^\sigma\qquad 对一切\ x\in E\qquad (36)$$

其中 $\sigma=\sigma_u$ 是对应于u的自同构而 $r_u\in K^*$ 称为u的乘子；公式(34)指出，如果Q是无亏数的，u就是具同一乘子的辛半类似变换. 这些半类似变换組成直射变换羣 $\Gamma L_n(K)$ 的一个子羣，記作 $\Gamma O_n(K,Q)$ 它的正規子羣 $GO_n(K,Q)=\Gamma O_n(K,Q)\cap GL_n(K)$

中的变换称为(对于Q的)类似变换，而那些具乘子1的称为正交变换；它們組成$GO_n(K, Q)$的一个正規子羣$O_n(K, Q)$，称为(对于Q的)正交羣. 映射$u \to \sigma_u$是从$\Gamma O_n(K,Q)$到K的自同构羣的一个子羣上的同态，其核为$GO_n(K,Q)$，而$u \to r_u$是从$GO_n(K,Q)$到乘法羣K^*的一个子羣上的同态，其核为$O_n(K,Q)$. 显然$Z_n = H_n \subset GO_n(K, Q)$，而位似变换$x \to x\gamma$的乘子是$\gamma^2$；$\Gamma O_n$和$GO_n$在$P\Gamma L_n(K)$中的象$P\Gamma O_n(K, Q)$和$PGO_n(K, Q)$分别同构于$\Gamma O_n/Z_n$和$GO_n/Z_n$. 不难驗証(第二章 §10)，一般說来$O_n$的中心化为单位元素，因之$O_n$与它在$P\Gamma L_n$中的象$PO_n$，即它的射影羣同构.

对应于两个等价的二次形式的正交羣是同构的，而且对于任何$\alpha \in K^*$，我們有$\Gamma O_n(K, \alpha Q) = \Gamma O_n(K, Q)$，$GO_n(K, \alpha Q) = GO_n(K, Q)$及$O_n(K, \alpha Q) = O_n(K, Q)$.

設u是一个正交变换，容易証明$u(E^0) = E^0$而u对于E^0的限制是单位变换(因为，如果$x \in E^0$，我們可以把$Q(u(x)) = Q(x)$写成$Q(u(x) - x) = 0$)；因此u由它对于E_1的限制完全确定，而对于$x \in E_1$，可以設$u(x) = u_1(x) + u_2(x)$，其中$u_1(x) \in E_1$而$u_2(x) \in E^0$. 可以証明u_1应該属于辛羣$Sp_{2p}(K)$而且$Q(u_1(x)) + Q(x) \in M$对一切$x \in E_1$；反之，如果u_1具这两个性质，那么就存在一个而且是唯一的一个u_2，使得$u_1 + u_2 \in O_n(K, Q)$ (J. Dieudonné[4]，53—54 頁). 因此羣$O_n(K, Q)$可以看作是$Sp_{2p}(K)$中使得$Q(v(x)) + Q(x) \in M$的v对一切$x \in E_1$所組成的子羣. 如果Q是沒有亏数的，最后这个条件就化为$Q(v(x)) = Q(x)$.

当K是完备域时，一个非退化形式Q是无亏数的，如果n是偶数；是亏数1的，如果n是奇数. 在后面的情形，羣$O_n(K,Q)$与辛羣$Sp_{2p}(K)$相重.

当Q是无亏数的形式时，阿尔夫(C. Arf)[1]将維特定理推广如下：

存在一个正交变换$u \in O_n(K, Q)$，使得$u(V) = W$的充分必要条件是Q对于V和W的限制是等价的.

将薛佛侶的証明(§ 11)作如下的修改卽可应用到这个情形：在条件(A)中，将 $f(z,z)=f(z',z')$ 易之以 $Q(z)=Q(z')$；在証明的末尾，因为 $f(a,a)=0$，有 $f(a,b)=f(a,b-a)=0$，由此根据假設就推出 $Q(b-a)=Q(b)+Q(a)=0$. 那么关系式 $Q(z+c+(b-a)\xi)=Q(z)$ 就化为

$$\alpha\xi=Q(z+c)+Q(z),$$

因为 $\alpha\neq 0$，所以这个关系式就将 ξ 确定了.

从这个結果立刻可以推出 §11 中的性質 3)，4)和 5)也是成立的，只要将“全迷向”易之以“奇异”.

正交羣 $O_n(K,Q)$（看作辛羣 $Sp_{2\nu}(K)$ 的一个子羣）中的平延是一个辛平延 $x\to x+\lambda f(x,a)a$，其中 a 应該是一个迷向向量. 将这个变换是正交变换的条件写出来就得到 $\lambda+\lambda^2Q(a)\in M$.

第二章　典型羣的构造

§1. $GL_n(K)$ 的中心及换位子羣

設 E 为 K 上的 n 維向量空間. 和 E 的一切綫性变换都交换的直射变换 u（当 $n>1$ 时）也和 E 的一切平延相交换（第一章 §2），因之 E 中一切直綫都保持不变. 在 E 中取一組基就可推出 u 是位似变换，这就証明了 $GL_n(K)$ 在 $\Gamma L_n(K)$ 中的中心化子是位似变换所組成的羣 H_n'；这个命題当 $n=1$ 时是显然的.

当 $n\geqslant 2$ 时，我們把由 $GL_n(K)$ 中的平延所生成的 $GL_n(K)$ 的子羣 $SL_n(K)$ 称为（体 K 上，n 个变数的）特殊綫性羣或幺模羣；自然它是正規子羣. 此外，$SL_n(K)$ 是 $GL_n(K)$ 的换位子羣，除非 $n=2$ 而 K 是两个元素的域 $\mathbf{F}_2$（J. Dieudonné[1]）. 我們把这个事实的証明写成以下几步：

a）先把羣 $GL_n(K)$ 和 n 級可逆矩陣所組成的羣看作同一个羣，我們証明每个矩陣 A 可以按照下面的办法写成一些平延和一个伸縮变换的乘积. 以 I 表单位矩陣，而以 E_{ij} 表除 i 行 j 列的元素是 1 之外其余的元素都等于 0 的矩陣，令 $B_{ij}(\lambda)=I+\lambda E_{ij}$ $(i\neq j)$ 及 $D(\mu)=I+(\mu-1)E_{nn}$；$B_{ij}(\lambda)$ 是一个平延的矩陣而 $D(\mu)$ 是一个伸縮变换的矩陣. 注意，矩陣 $B_{ij}(\lambda)A$ 系由 A 将它的第 j 行左乘以 λ 再加到第 i 行而得到的；如令 $P_{ij}=B_{ij}(1)B_{ji}(-1)B_{ij}(1)$，則 $P_{ij}A$ 系将 A 的第 i 行易之以第 j 行而将第 j 行易之以改变符号之后的第 i 行而得到的. 借助于这些說明就容易証明，每个可逆矩陣 A 都可以表作 $A=B\cdot D(\mu)$，其中 B 是 $SL_n(K)$ 中的一个矩陣而且是一些矩陣 $B_{ij}(\lambda)$ 的乘积（分解法当然不是唯一的；参看 L. E. Dickson[1]）. 我們順便指出将 $SL_n(K)$ 中任意一个变换分解成平延的乘积时所需要的項数的最小数是

n，如果这个变换不是伸缩变换；而在相反的情形，这个最小数是 $n+1$ (J. Dieudonné[19])；

b) 其次我們証明羣 $SL_n(K)$ 永远包有 $GL_n(K)$ 的换位子羣，換言之，GL_n/SL_n 是阿倍尔羣. 因为对于每个是一些 $B_{ij}(\lambda)$ 的乘积的矩陣 B，$D(\mu)\cdot B$ 可以表成形状 $B'\cdot D(\mu)$ (而 $B'\in SL_n$)，所以由 a) 就推出只需要証明 $D(\lambda\mu\lambda^{-1}\mu^{-1})\in SL_n(K)$. 可是我們有 $D(\lambda\mu\lambda^{-1}\mu^{-1})=D(\lambda)(D(\mu\lambda\mu^{-1}))^{-1}$，因此只需要証明同一类(第一章 § 2) 中的两个伸縮变换在 $SL_n(K)$ 中共軛. 这容易从以下两点注意推出：

1° 給了 E 中两个异于 0 的向量 a 和 b，总存在一个平延或两个平延的乘积，将 a 变到 b；

2° 給了两个超平面 H_1 和 H_2 以及一个旣不含在 H_1 中又不含在 H_2 中的向量 a，总存在一个将 a 保持不变而将 H_1 变到 H_2 的平延；

c) 任意两个平延永远在 $GL_n(K)$ 中共軛，因此任何一个将 $GL_n(K)$ 映到一个阿倍尔羣上的同态映象 θ 一定将平延变到同一元素 σ. 因为 $B_{12}(\lambda)B_{12}(\mu)=B_{12}(\lambda+\mu)$，所以只要 K 中存在两个非零元素 λ 和 μ，使得 $\lambda+\mu\neq 0$，即除非 $K=\mathbf{F}_2$，我們就有 $\sigma^2=\sigma$，因此 σ 为单位元素. 如果 $K=\mathbf{F}_2$ 而 $n>2$，那么具同一超平面的 H 的平延 (加上单位元素) 組成一个羣 $T(H)$ 与 K^{n-1} 同构 (第一章 § 2)，而这个羣含有多于两个元素，于是考察 $T(H)$ 中两个相异的平延的乘积在 θ 下的象，也可以得出結論 $\sigma^2=\sigma$. $n=2$ 而 $K=\mathbf{F}_2$ 是例外情形，这时我們有 $GL_2(\mathbf{F}_2)=SL_2(\mathbf{F}_2)$ (因为这时沒有异于单位元素的伸縮变换存在) 而这个羣与对称羣 $\mathfrak{S}_3$ 同构，因而是可解羣，于是它与它的换位子羣不同.

所有变换 $u\in SL_n$ 可以表成至多 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 个换位子的乘积 (J. Dieudonné[19])，除 $n=2$，$K=\mathbf{F}_2$ 这个例外情形；当 K 交换时，这是代数李羣里一个一般定理的特殊情形 (C. Chevalley[2]，122頁)，同时如果考慮到 u 的特征值性质，那么 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 这个数还可以減

小 (K.Shoda[1,2], H. Toyama[1]).

以C表乘法羣 K^* 的换位子羣，那么对于一切 $n \geqslant 2$，商羣 $GL_n(K)/SL_n(K)$ 与阿倍尔羣 K^*/C 同构(J. Dieudonné[1])。当K变换时，应用行列式的存在性所提供的从 $GL_n(K)$ 到 K^* 上的表示,可以立刻推出这个定理．在一般情形,对于每个 n 級可逆矩陣 A，也同样来确定羣 K^*/C 中的一个元素 det (A)，仍称为A 的行列式,使得映射 $X \to \det(X)$ 是从 $GL_n(K)$ 到 K^* 上的一个表示而它的核是 $SL_n(K)$；这样,前面所宣布的定理就証明了．为了定义 det (A),我們对 n 施用归納法．假定φ是从 K^* 到 K^*/C 上的自然映射;如果 $A=(a_{ij})$ 而 $a_{i1} \neq 0$,我們将A 的第 i 行左乘以一些适当的元素之后分別加到指数 $\neq i$ 的那些行去，从而得到一个矩陣B使它的第一列只有一个非零系数 a_{i1}；那么我們置

$$\det A=\varphi((-1)^{i+1}a_{i1}) \det (B_{i1}),$$

而以 B_{i1} 表将B的第一列和第 i 行划去之后所得的矩陣．对 n 施行归納法可以証明,这个定义不依賴于(使 $a_{i1} \neq 0$)指数 i 的选取．用 $B_{ij}(\lambda)$ A 代替A 幷不改变 det (A)的值，幷且用一个将A 的某一行左乘以μ而得的矩陣代替A就等于将 det (A) 乘以 $\varphi(\mu)$．如果 $A=BD(\mu)$ 而B是一些矩陣 $B_{ij}(\lambda)$ 的乘积，那么从上面这些性质就可以推出 det $(A)=\varphi(\mu)$;于是立刻可以推出 $X \to \det(X)$ 是 $GL_n(K)$ 到 K^* 上的一个表示其核为 $SL_n(K)$．

从上面的討論也可以推出，如果V和W是E中两个維数相同的向量子空間,那么总存在一个变换 $u \in SL_n(K)$ 使得 $u(V)=W$．

§2. 羣 $SL_n(K)$ 的构造

在 §1 开始所給的証明同时也証明了 $SL_n(K)$ 在 $\Gamma L_n(K)$ 里的中心化子仍然是位似变换所組成的羣 H_n．于是 $SL_n(K)$的中心就是羣 $SL_n(K) \cap Z_n$,它由行列式(在 §1 的意义下)为 K^*/C 中单位元素的中心位似变换 $x \to x\gamma$ 所組成;换言之，它由中心位似变换 $x \to x\gamma$，而 γ^n 属于 K^* 的换位子羣C者，所組成．$SL_n(K)$ 对于它中心的商羣同构于 $SL_n(K)$ 到一般射影羣 $PGL_n(K)$ 中的自

然同态象 $PSL_n(K)$；我們称 $PSL_n(K)$ 为(体K上 n 个变数的)特殊射影羣或么模射影羣.

为了研究 $PSL_n(K)$ 的构造,我們分别考察 $n > 2$ 和 $n = 2$ 两种情形.

A. $n > 2$. 这时羣 $PSL_n(K)$ 是单羣(L. E. Dickson[1], J. Dieudonné[1], M. Abe[1]), 証明可以簡述如下:

a) 首先我們指出,如果 $n > 2$, 那么任意两个平延在 $SL_n(K)$ 中都共軛;实际上,它們在 $GL_n(K)$ 中是共軛的, 而且显然对于任何一个平延 u, GL_n 中都存在一个与 u 相交换而行列式之值任意的变换(参看第一章§2).

为了証明 $SL_n(K)$ 的一个不包含它的中心的正規子羣G与 $SL_n(K)$ 相重, 只需要証明G包含一个平延就够了.

b) 設 $u \in G$ 而 u 不包在 SL_n 的中心之中,那么至少有一个不与 u 变换的平延 v 存在,于是 $w = (v^{-1}u^{-1}v)u = v^{-1}(u^{-1}vu)$ 是两个平延 $v_1 = v^{-1}$, $v_2 = u^{-1}vu$ 的乘积, 而且异于单位元素, 同时属于 G. 如果 a_1 和 a_2 分别是 v_1 和 v_2 的直綫上的向量,那么对于一切 $x \in E$, $w(x) - x$ 都属于 a_1 和 $v_1(a_2)$所生成的維数 $\leqslant 2$ 的子空間 w. 另一方面, v_1 和 v_2 的超平面的交并不等于 0, 因此w至少将一个向量 $b \neq 0$ 保持不变.

这样,如果w是一个平延, 那么定理就証明了. 在相反的情形,設H是包含w的一个超平面,那么它整体地被w保持不变. 从w不是平延这个假設就推出, w不属于以H为超平面的平延所組成的阿倍尔羣 $T(H)$ 的中心化子. 实际上,这个中心化子是 $T(H)$ 与 SL_n 的中心的乘积(第一章§2),我們容易驗証, 如果这个羣的一个变换不属于 $T(H)$,那么它就不使任何 $\neq 0$ 的向量保持不变. 因之存在一个平延 $t \in T(H)$ 使得 $wtw^{-1} \neq t$; 因为 $wtw^{-1} \in T(H)$, 所以 $t^{-1}wtw^{-1} = t_1$ 属于 $T(H)$ 而且不等于单位元素; 可是 $t_1 \in G$, 这就証明了定理.

B. $n = 2$. 这时羣 $PSL_2(K)$ 是单羣,除非 $K = \mathbf{F}_2$ 或 $K = \mathbf{F}_3$ (L. E. Dickson[1], K. Iwasawa[1], J. Dieudonné[1,2], M. Abe

[1]，华罗庚[8]）．一般説来，任意两个平延不見得在 $SL_2(K)$ 中共轭，其实可以証明，只要乘法羣 K^* 不是由 K^* 中的平方元素（即 K^* 中的元素的平方）所生成，就一定有两个在 $SL_2(K)$ 中不共轭的平延存在．然而，因为 $B_{12}(\lambda)=P_{12}B_{21}(-\lambda)P_{12}^{-1}$，所以为要証明 $SL_2(K)$ 的一个正規子羣 $G=SL_2(K)$，根据 §1 的結果，只要証明所有的矩陣 $B_{12}(\lambda)$ 都属于 G．

B1）假定 K 不是域 $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_5$ 三者之一，并假定 $U=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ 是 G 中的一个不属于中心的矩陣．

a）假設 $\beta\neq 0$，我們总能够找到一个 λ 使得 $B_{21}(\lambda)UB_{21}^{-1}(\lambda)=$ $=\begin{pmatrix}0 & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$．于是可以假定 $\alpha=0$．我們确定一个矩陣 $V\in SL_2$ 使得 UV 和 VU 的第一列分别为 $e_1\xi$ 和 $e_1\eta$ 的形状（e_1 是基中的第一个向量），从这些条件便可看到 $V=\begin{pmatrix}-\gamma^{-1}\delta\beta^{-1}\xi & \eta\gamma^{-1}\\ \beta^{-1}\xi & 0\end{pmatrix}$ 且具条件

$$\varphi(\xi\eta)=1. \tag{1}$$

那么矩陣 $U_1=U^{-1}V^{-1}UV$ 属于 G 而等于 $\begin{pmatrix}\rho & \zeta\\ 0 & \rho'\end{pmatrix}$，此地 $\rho=\eta^{-1}\xi$，$\rho'=\beta^{-1}\xi^{-1}\beta\gamma\eta\gamma^{-1}$；由此推出矩陣 $U_1B_{12}(\mu)\,U_1^{-1}B_{12}(-\mu)=$ $=\begin{pmatrix}1 & \rho\mu\rho'^{-1}-\mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 也属于 G．剩下还需要証明可以在 K^* 中选取 ξ, η 和 μ 使得(1)成立而 $\rho\mu\rho'^{-1}-\mu$ 可以在 K 中取任意值．当 K 交換时，条件(1)可以写作 $\xi\eta=1$，同时有 $\rho\mu\rho'^{-1}-\mu=\mu(\xi^4-1)$；这个元素可以取任意值，只要 K 中至少有一个元素 ξ 使得 $\xi^4\neq 1$；而当 K 是交換域同时又不是 $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_5$ 三者之一时，这永远是可能的．

在下面我們假定 K 是不交換的．

b）首先証明可以取 $\xi\eta=1$ 而选 $\mu\in K^*$ 使得 $\rho\mu\rho'^{-1}-\mu\neq 0$．如果不然，我們就会有 $\xi^2\in Z$ 而 $\xi^2=\beta^{-1}\xi^{-1}\beta\gamma\xi^{-1}\gamma^{-1}$ 对一切 $\xi\in K^*$．首先取 $\xi\in Z^*$，这就得到 $\xi^4=1$ 对一切 $\xi\in Z^*$，因此 $Z=\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ 或 $\mathbf{F}_5$．对于 K 中适合唯一条件 $\xi+\eta\neq 0$ 的 ξ 和 η，从 ξ^2, η^2 和 $(\xi+\eta)^2$ 都属于 Z 就推出 $\xi\eta+\eta\xi\in Z$；从这里很容

易推出 ξ 和 η 所生成的体 $Z(\xi,\eta)$ 在 Z 上的次数顶多等于 4. 因为 Z 是有限域,所以这个体也是有限的,因而是交换的. 由此推出 K 是交換的,但这个情形已經除外了.

c) 于是我們就証明了总存在一个平延 $B_{12}(\mu_0)\in G$ (而 $\mu_0\neq 0$). 对于这个矩陣行使上面对于 U 所行使的那些运算, 我們可以取 $\eta=\xi^{-1}$ 而选 ξ 和 μ 使得 $\rho\mu\rho'^{-1}-\mu=\xi^2\mu\mu_0^{-1}\xi^2\mu_0-\mu$ 等于 1. 实际上, 考察域 $Z(\mu_0)$, 如果 $Z(\mu_0)\neq \mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ 及 $\mathbf{F}_5$, 我們可以取 $\xi\in Z(\mu_0)$ 使得 $\xi^4\neq 1$, 于是只要再取 $\mu=(\xi^4-1)^{-1}$ 就行了. 如果 $Z(\mu_0)=\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ 或 $\mathbf{F}_5$, 那么它在 K 中的中心化子就不能是它自己 (否則 K 就是交換的), 这时在它的中心化子中取 ξ 使得 $\xi^4\neq 1$ 再取 $\mu=(\xi^4-1)^{-1}$ 就行了.

d) 我們已經証明了 $B_{12}(1)\in G$, 最后我們証明 $B_{12}(\lambda)\in G$ 对一切 $\lambda\in K$. 为了証明这一点, 再对于 $B_{12}(1)$ 行使上面对于 U 所行使的运算. 假定 N 是 $Z(\lambda)$ 在 K 中的中心化子, 那么它的中心就包有 $Z(\lambda)$. 同时我們看出 $N\neq \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ 及 $\mathbf{F}_5$, 而象 b) 中一样 $\xi^4=1$ 不能对于一切 $\xi\in N^*$ 都成立; 取 $\xi\in N^*$ 使得 $\xi^4\neq 1$, 那么只要再取 $\mu=\lambda(\xi^4-1)^{-1}$ (它与 λ 和 ξ 都可换)就行了.

e) 剩下还需要研究矩陣 U 中 $\beta=0$ 的情形. 如果 $\gamma\neq 0$, 我們就用属于 G 的 $P_{12}UP_{12}^{-1}=\begin{pmatrix}\delta & -\gamma\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ 代替 U. 如果 $\beta=\gamma=0$, 因为 U 在 SL_2 中, 我們一定有 $\varphi(\alpha\delta)=1$, 那么就有 $B_{12}(\mu)UB_{12}^{-1}(\mu)=\begin{pmatrix}\alpha & \mu\delta-\alpha\mu\\ 0 & \delta\end{pmatrix}$, 这就化为情形 a) 除非 $\mu\delta=\alpha\mu$ 对一切 $\mu\in K$; 但这时推出 $\alpha=\delta$ 而 $\alpha\in Z^*$, 这与 G 不包含在 $SL_2(K)$ 的中心之中这个假設相抵触. 因此当 K 不是 F_2, F_3 和 F_5 时, 証明就完成了.

B2) 如果 $K=\mathbf{F}_5$, 象 e) 中一样可以假設 $U=\begin{pmatrix}0 & \beta\\ -\beta^{-1} & \delta\end{pmatrix}$. 仍采用 a) 中的記号, 取 $\xi=\eta^{-1}$, 这时有 $U_1=\begin{pmatrix}\eta^{-2} & \beta\delta(\eta^2-1)\\ & \eta^2\end{pmatrix}$. 首先假設 $\delta\neq 0$; 因为 $\eta^2=\pm 1$ 对 K 中一切 $\eta\neq 0$, 可以取 $\eta^2=-1$, U_1 是一个矩陣 $-B_{12}(\mu)$ 而 $\mu\neq 0$, 那么 $U_1^2=B_{12}(2\mu)$ 而 $2\mu\neq 0$, 同时 $B_{12}(2\mu)$ 的諸方冪就是一切矩陣 $B_{12}(\lambda)$, $\lambda\in K$. 如果 $\delta=0$,

无論λ和μ是什么元素，矩陣

$$B_{21}(\mu)B_{21}(\lambda)UB_{21}^{-1}(\lambda)UB_{21}^{-1}(\mu)$$

都属于G而且等于

$$-\begin{pmatrix} 1-\beta^2\lambda\mu & \beta^2\lambda \\ \lambda-\beta^2\lambda^2\mu-\beta^2\lambda\mu^2 & 1+\beta^2\lambda^2+\beta^2\lambda\mu \end{pmatrix};$$

取$\beta^2\lambda\mu=1$，这个矩陣的主对角綫上第一个元素就是零，第二个元素就等于$-(2+\lambda^2\beta^2)$，于是它等于-1或-3．这就化为考察过的第一个情形了，因此我們知道$PSL_2(\mathbf{F}_5)$是单羣(参看第四章§8)．

B3）剩下还需要考察例外情形$\mathbf{F}_2$和$\mathbf{F}_3$．一般説来，羣$GL_n(\mathbf{F}_q)$的阶等于

$$(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1});$$

实际上，只要注意这个数目等于向量空間$\mathbf{F}_q^n$中所有基的个数就够了．羣GL_n/SL_n与具$q-1$个元素的羣$\mathbf{F}_q^*$同构，因此$SL_n(\mathbf{F}_q)$的阶是

$$(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-2})q^{n-1}.$$

$SL_n(\mathbf{F}_q)$的中心与$\mathbf{F}_q^*$中单位元素的n次根所組成的子羣同构，这是一个d阶循环羣，而d是$q-1$和n的最大公因数；因此$PSL_n(\mathbf{F}_q)$的阶是

$$(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-2})q^{n-1}/d.$$

特别，$PSL_2(\mathbf{F}_2)$是一个6阶的羣而$PSL_2(\mathbf{F}_3)$是一个12阶的羣，这两个羣都是可解羣（参看第四章§8）．除这两个例外情形，$PSL_n(\mathbf{F}_q)$組成一类（依賴于两个参数n和q，而q是一个素数的方冪）有限单羣（参看 L. E. Dickson[1]，309—310頁）．

最后我們再指出，本节中的推理同样也証明了$GL_n(K)$的不属于中心Z_n的任何正規子羣都包含么模羣$SL_n(K)$，除非$PSL_n(K)$不是单羣．

§3. 酉羣的生成元及中心

以下除非另有声明，我們永远假定酉羣$U_n(K,f)$包有辛羣和

(特征数$\neq 2$的域上的)正交羣作为特殊情形. 并且永远假定$n \geqslant 2$而当K的特征数为2时,f是迹形式.

如果酉羣 $U_n(K, f)$ 不是辛羣 (换言之, 如果f不是交錯形式),那么除了羣$U_2(\mathbf{F}_4)$是个例外之外,它由一切拟对称 (第一章§12)所生成(J. Dieudonné[16]);証明的想法是对于n用归納法;对于$u \in U_n$和E中的一个非迷向向量x,两个向量$u(x)-x$和$u(x)+x$之中(当K的特征数$\neq 2$时)至少有一个是非迷向的, 因之有一个对于与这个非迷向向量正交的超平面的拟对称将x变到$u(x)$或$-u(x)$; 在第二个情形, 另外一个拟对称即将$-u(x)$变到$u(x)$, 因此永远存在拟对称的一个乘积s使得$s^{-1}u$将x保持不变, 并且可以将它看作是与x正交的超平面中的酉变换, 由此即可推出結論. K的特征数$=2$的情形的研究比較細致. 我們还可以証明正交羣$O_n(K, f)$中每个变换頂多是n个对称的乘积(E. Cartan[2], J. Dieudonné[4], P. Scherk[1]); 任何酉羣$U_n(K)$中每个变换頂多是$n+1$个拟对称的乘积 (J. Dieudonné[19]), 羣$U_2(\mathbf{F}_4)$当然是例外,而最大值$n+1$可以达到.

K的反自同构J显然将K^*的换位子羣C(全局地)保持不变, 因此它誘导出商羣K^*/C的一个对合性自同构 (我們仍把它記作J). 从上面的結果很容易推出,对于不是正交羣的酉羣而言,这个羣里每个变换行列式的形状都是$\gamma^J\gamma^{-1}$而$\gamma \in K^*/C$. 至于正交羣,同样看到每个正交变换行列式都等于± 1(参看§13).

酉羣$U_n(K, f)$在$\Gamma L_n(K)$的中心化子中的每个变换与一切拟对称都交换, 因此将一切非迷向超平面保持不变; 它也与一切酉平延变换(当酉平延存在时),因之亦将一切迷向直綫保持不变. 这就証明了,当U_n不是正交羣时, $U_n(K, f)$的中心化子就是位似变换羣H_n; 因此U_n的中心是$U_n \cap Z_n$, 它由一切中心位似变换$x \rightarrow x\gamma$具性質$\gamma^J\gamma = 1$者所組成.

至于正交羣$O_n(K, f)$, 它的中心化子仍然是H_n,若$n \geqslant 3$;这可以从上面的結果和下面这个引理推出:

1) 若$n \geqslant 3$, E中每条迷向直綫都是两个非迷向平面的交

实际上，如果 x 是一个迷向向量，y 是一个与 x 正交但不与 x 共綫的向量，z 是一个不与 x 正交的非迷向向量，那么由 x 和 z 所确定的平面及由 x 和 $y+z$ 所确定的平面就回答了我們的問題.

剩下还要研究羣 $O_2(K,f)$：設 (e_1, e_2) 是 E 的一組正交基. 如果 K（其特征数 $\neq 2$）中元素个数大于 3，那么就存在一个 $\alpha \in K^*$ 使得 $e_1+e_2\alpha$ 不是迷向向量；O_2 在 ΓL_2 的中心化子中的一个元素 u 应該将含向量 $e_1+e_2\alpha$ 的直綫保持不变，同时也将坐标軸保持不变，这就証明了 $u(e_1)=e_1\gamma_1$，$u(e_2)=e_2\gamma_2$ 而 $\alpha^\sigma=\alpha\mu$，其中 $\mu=\gamma_1\gamma_2^{-1}$（$\sigma$ 是 K 的对应于 u 的自同构）. 注意，至多有两个 $\alpha \in K^*$ 使得 $e_1+e_2\alpha$ 是迷向的. 如果 K^* 至少有 6 个元素，那么就存在两个元素 $\alpha, \beta \in K^*$ 使得 $e_1+e_2\alpha$，$e_1+e_2\beta$ 和 $e_1+e_2\alpha\beta$ 都是非迷向的；写出 $\alpha^\sigma=\alpha\mu$，$\beta^\sigma=\beta\mu$ 及 $(\alpha\beta)^\sigma=(\alpha\beta)\mu$ 即得 $\mu^2=\mu$，由此推出 $\mu=1$，于是 $\alpha^\sigma=\alpha$ 除可能对于 K^* 中 2 个元素之外；可是如果 σ 不是单位自同构，那么 K^* 中被 σ 保持不变的元素所組成的子羣的指数頂多是 2，因此如果 K 至少有 7 个元素，σ 就是单位自同构而 u 就是一个位似变換. 当 $K=\mathbf{F}_5$ 时，这个結果仍然成立，因为这个域沒有异于单位自同构的自同构. 当 $K=\mathbf{F}_3$ 时需要分別研究情形 $f(e_1,e_1)=f(e_2,e_2)$ 和 $f(e_1,e_1)=-f(e_2,e_2)$；在第一个情形，指数 $\nu=0$，因之沒有迷向向量，于是 u 必需是一个位似变換. 在第二个情形，$\nu=1$，这时坐标軸是 E 中仅有的非迷向直綫，而 $O_2(\mathbf{F}_3, f)$ 是一个 4 阶的阿倍尔羣（两个 2 阶循环羣的乘积），它是它自己在 $\Gamma L_2(\mathbf{F}_3)=GL_2(\mathbf{F}_3)$ 中的中心化子.

§4. 羣 $U_n(K,f)$ 的构造

（f 是指数 $\geqslant 1$ 的迹形式，正交羣除外）

I. 羣 $T_n(K,f)$

在研究酉羣的构造时，$\nu \geqslant 1$ 和 $\nu=0$（見 §12）这两个情形有些不同，因此需要分别来研究. 在本节和次节中我們永远假定 $\nu \geqslant 1$. 因为正交羣已經除外，所以 $U_n(K,f)$ 中存在酉平延. 我

們假定形式 f 是反厄米特形式，这个假定无損于一般性（第一章 §6），于是西平延的形状是 $x \to x + a\lambda f(a, x)$，其中 a 为迷向向量而 λ 为对称元素（第一章 §12）. 以 $T_n(K, f)$ 表由西平延所生成的 $U_n(K, f)$ 的正規子羣，要研究 $T_n(K, f)$ 的构造，需要利用下面几个引理：

1）如果 K 不是交換的而 $J \neq 1$，則 K 由它里的对称元素的集合 S 所生成，除非 K 是特征数 $\neq 2$ 的广义四元数体而 S 与 K 的中心 Z 一致（J. Dieudonné[13]）. 当 K 是域而 $J \neq 1$ 时，S 显然是 K 的一个子域而 K 是 S 的二次可离扩张.

至少含有一个迷向向量的非迷向平面称为双曲平面；这时存在两个迷向向量 a 和 b，它們組成这个双曲平面的一組基而 $f(a, b) = 1$（第一章 §11）. 此外，由 U_n 不是正交羣这个假設推出，在一个双曲平面中至少存在三个相异的迷向向量.

2）当 $n \geqslant 3$ 时，每条非迷向直綫都是两个双曲平面的交.

实际上，設 x 是一个非迷向向量，y 是一个迷向向量而 z 是既不与 x 又不与 y 正交且不属于通过 x 和 y 的平面 P 的一个向量；这样一个向量是存在的，因为如果存在一个与 x 和 y 正交而且不属于 P 的向量 t，只要在由 x 和 t 所决定的平面中选取一个既不与 x 又不与 t 共綫的向量作为 z 即可；在相反的情形（这只能在 $n = 3$ 时发生），如果 t 是一个与 x 正交而不与 y 共綫的向量，仍可在由 x 和 t 所决定的平面中选取一个既不与 x 又不与 t 共綫的向量作为 z. 于是由 y 和 z 所决定的平面 Q 是个双曲平面而且包含三个两两都不共綫的迷向向量 y, y_1, y_2；因而至少这三个向量之中有两个向量不与 x 正交，它們与 x 所确定的两个双曲平面就回答了我們的問題.

性质 2）对于正交羣 $O_n(K, f)$（K 的特征数 $\neq 2, \nu \geqslant 1$）仍然成立，除非 $K = \mathbf{F}_3$ 而 $n = 3$（J. Dieudonné[4]，30—31 頁）.

3）設 a 和 b 是两个不共綫的迷向向量，那么总存在一个变換 $u \in T_n$ 使得 $u(a)$ 与 b 共綫. 如果 $f(a, b) \neq 0$，那么 $\mu = (f(a, b))^{-1}$ 就使得 $c = a + b\mu$ 迷向，于是平延 $x \to x + cf(c, x)$ 就适

台条件．如果 $f(a, b) = 0$，那么 a 和 b 所决定的平面就是全迷向平面，因此 $n \geqslant 3$ 同时存在一个向量 z 使得 $f(a, z) \neq 0$ 及 $f(b, z) \neq 0$；由 a 和 z 所决定的平面是双曲平面而且包有一个不与 a 共綫的迷向向量 a_1，因之不与 b 正交．因为 $f(a, a_1) \neq 0$ 及 $f(a_1, b) \neq 0$，这就化为前面一个情形了．

当 $n = 2$ 时，E 是一个双曲平面；我們可以在这个平面中选取两个迷向向量 e_1, e_2 作为基而 $f(e_1, e_2) = 1$．对于这組基（和 § 1 中的記号）而言：

4）羣 $T_2(K, f)$ 由酉平延 $B_{12}(\lambda)$ 和 $B_{21}(\mu)$ 所生成（此地 λ 和 μ 跑过 K 中对称元素的集合）．首先我們指出 $x = e_1\alpha + e_2\beta$ 是迷向向量的条件可以写作 $\alpha^J\beta - \beta^J\alpha = 0$，因而当 $\beta \neq 0$ 时可以表作 $\alpha\beta^{-1}$ 是对称元素；于是平延 $B_{12}(-\alpha\beta^{-1})$ 就将 x 变到一个与 e_2 共綫的向量，因此向量 x 的每个平延都被 $B_{12}(-\alpha\beta^{-1})$ 变形为形状 $B_{21}(\lambda)$ 的一个平延，由此即推出本引理．

从这些引理首先可以看出，T_n 的中心是 T_n 与 $GL_n(K)$ 的中心的交 $W_n = T_n \cap Z_n$．实际上，T_n 中与 T_n 的一切平延都交换的变换一定将每条迷向直綫都保持不变，因而将一切双曲平面保持不变；由引理 2，知如果 $n \geqslant 3$，它就将每条直綫都保持不变．当 $n = 2$ 时，T_n 的中心中的变换应該与平延 $B_{12}(\lambda)$ 和 $B_{21}(\mu)$ 交换，这就是說，它的矩陣形状是 $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & (\alpha^{-1})^J\end{pmatrix}$ 而 $\alpha\lambda = \lambda(\alpha^{-1})^J$ 对 K 中一切对称元素 λ．引理 1 指出，α 属于 K 的中心，除非 K 是特征数 $\neq 2$ 的自反体而集合 S 与 K 之中核 Z 一致．但在这个情形，矩陣 $B_{12}(\lambda)$ 和 $B_{21}(\mu)$ 中的元素都属于 Z，因此依引理 4 T_2 中每个矩陣的元素都属于 Z；特別，我們应該有 $\alpha \in Z$，在这个情形定理也証明了．

T_n/W_n 的构造由下面几个定理所闡明（J. Dieudonné[13]；或华罗庚[10]）．

A）如果 T_2/W_2 是单羣，則当 $n \geqslant 3$ 时 $T_n(K, f)/W_n$ 是单羣（对于指数 $\geqslant 1$ 的一切迹形式 f）．我們注意，一般說来，不見得酉平延两两在 T_n 中共軛；可是根据引理 3，如果 T_n 的一个正規子羣

G包有对应于同一个向量 a 的一切平延，那么就可以推出它包有一切平延，因而就等于 T_n。因此問題就化为証明任意一个不含在 W_n 中的 T_n 的正規子羣 G 都具这个性質。設 $u \in G$ 而 $u \notin W_n$，那么存在一个迷向向量 $x \in E$ 使得 x 和 $u(x)$ 不共綫（否則根据引理 2，u 就是一个位似变换）。首先假定 $f(x, u(x)) = 0$，这时有一个与 $u(x)$ 正交而不与 x 正交的向量 z 存在，包含 x 和 z 的平面 P 是双曲平面，因之它含有一个不与 x 共綫的迷向向量 y。引理 3 指出存在一个将 x 变为 $y\lambda$ 的平延 v 而 v 的向量属于 P，于是 $v(u(x)) = u(x)$，$u_1 = vu^{-1}v^{-1}u$ 属于 G 而 $u_1(x) = y\lambda$。因此永远可以化为 $f(x, u(x)) \neq 0$ 的情形。这时設 w 是向量 x 的一个平延，那么 uwu^{-1} 就是向量 $u(x)$ 的一个平延，因而不与 w 交换。設 Q 是 x 和 $u(x)$ 所决定的双曲平面，則 $u_2 = w^{-1}uwu^{-1}$ 属于 G 而且将平面 Q 的正交子空間 Q^0 中每个向量都保持不变；因此我們可以把 u_2 看作属于羣 $U_2(K, f_1)$，其中 f_1 是 f 在 Q 上的限制，此外，因为 u_2 是两个平延的乘积，所以 $u_2 \in T_2(K, f_1)$，又因为 u_2 不与 w 相交换，所以 u_2 不在 $T_2(K, f_1)$ 的中心之中。根据假設就可以推出 G 包有 $T_2(K, f_1)$ 中一切变换，特别 G 包有向量 x 的一切平延，这就証明了定理。

B）如果体 K 中元素个数大于 25，則羣 $T_2(K, f)/W_2$ 是单羣（对于指数 $\geqslant 1$ 的一切迹形式 f）。証明的途径类似于 § 2 中所給的 $PSL_2(K)$ 的单純性的証明，自然必需利用一个矩陣 $U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ 是酉矩陣的条件。另一方面，平延 $B_{12}(\lambda)$ 和 $B_{21}(\mu)$ 是酉平延乃指 λ 和 μ 应該是对称元素；最后我們还要利用引理 1 和引理 4（J. Dieudonné[13]，371—375 頁）。

C）設 K 是交换域。如果 $J = 1$，那么 K 中每个元素都是对称元素；根据引理 4，$T_2(K, f)$ 由矩陣 $B_{12}(\lambda)$ 和 $B_{21}(\mu)$ 所生成，其中 $\lambda \in K$ 而 $\mu \in K$，因此 $T_2(K, f)$ 即是么模羣 $SL_2(K)$。如果 $J \neq 1$，那么 K 中对称元素的集合就是 K 的一个子域 K_0，而 K 是 K_0 的一个二次可离扩张；同样理由可以証明 $T_2(K, f)$ 是么模羣 $SL_2(K_0)$。从这两个注意和 § 2 的結果推出，当 K 頂多含 25 个元素时，除下

面的特殊情形之外，T_2/W_2 永远是单羣；这些特殊情形是：

a) $J=1$，$K=\mathbf{F}_2$ 及 $K=\mathbf{F}_3$；

b) $J\neq 1$，$K=\mathbf{F}_4$ 及 $K=\mathbf{F}_9$.

从 A) 可以得到結論，除了这四个情形之外，当 $n\geqslant 2$ 时，羣 T_n/W_n 是单羣．这些例外情形給出下面的結果：

a) 如果 $J=1$（辛羣），当 $n=2m\geqslant 6$ 时，$T_n(\mathbf{F}_2)/W_n$ 是单羣；当 $n=4$ 时，$T_4(\mathbf{F}_2)/W_4$ 有一个指数 2 的单子羣（見第四章 § 8）；当 $n=2m\geqslant 4$ 时，$T_n(\mathbf{F}_3)/W_n$ 是单羣(L. E. Dickson[1]，94—100 頁；J. Dieudonné[4]，14—16 頁).

b) 如果 $J\neq 1$（酉羣），当 $n\geqslant 4$ 时 $T_n(\mathbf{F}_4)/W_n$ 是单羣；$T_3(\mathbf{F}_4)$ 有一个正規羣鏈 $T_3\supset T_3'\supset W_3\supset\{1\}$，其中 T_3/T_3' 与对称羣 $\mathfrak{S}_3$ 同构而 T_3'/W_3 是 3 阶循环羣；当 $n\geqslant 3$ 时 $T_n(\mathbf{F}_9)/W_n$ 是单羣 (L. E. Dickson[1]，140—144 頁).

此外，上面的推理也証明了 $U_n(K,f)$ 中不包在它的中心中的正規子羣一定包含羣 $T_n(K,f)$，除非 T_n/W_n 不是单羣.

§ 5. 羣 $U_n(K,f)$ 的构造

（f 是指数 $\geqslant 1$ 的迹形式，正交羣除外）

II. 羣 $U_n(K,f)/T_n(K,f)$

如果不在 K 上或 f 上再附加一些假設（除 f 的指数 $\nu\geqslant 1$ 这个假設外），我們就不知道羣 $U_n(K,f)/T_n(K,f)$ 的构造；然而我們也得到了部分結果，变換 $u\in U_n$ 称为双曲变換，如果它将一个双曲平面 Q 的正交子空間 Q^0（它的維数显然是 $n-2$）中每个元素都保持不变；那么利用維特定理，容易証明下面这个引理：

1) 每个酉变換都是双曲变換之积(J. Dieudonné[13]，377頁).

无論在 f 上或 K 上加上一些特殊假設都能得到关于 U_n/T_n 的結論.

A) 如果指数 $\nu\geqslant 2$（由此推出 $n\geqslant 4$），则 $T_n(K,f)$ 是 $U_n(K,f)$ 的換位子羣而商羣 U_n/T_n 与阿倍尔羣 K^*/C 的一个商羣同构

(C 是 K^* 的换位子羣)(J. Dieudonné[13], 380頁;或华罗庚[10]).这个定理的証明依赖于引理 1) 和下面这两个当 $\nu \geqslant 2$ 时成立的性质:

2) 設 Γ 是 U_n 中对于同一个双曲平面 P 的双曲变换所組成的子羣,則商羣 $\Gamma/(\Gamma \cap T_n)$ 与 K^*/C 的一个商羣同构.

3) 設 P_1 和 P_2 是两个双曲平面,于是存在一个变换 $w \in T_n$ 使得 $w(P_1) = P_2$.

这两个引理当 $\nu = 1$ 而 $n \geqslant 3$ 时似乎也成立,可是只对于一些特殊的体 K(特别是特征数 $\neq 2$ 的广义四元数体)証明了定理 A).

基于同样的理由,設有(当 $\nu \geqslant 1$ 时)E 的两个子空間 V 和 W,而 f 在 $V \times V$ 和 $W \times W$ 上的限制是等价的,我們也不知道是否存在一个变换 $u \in T_n$ 使得 $u(V) = W$.

B) 现在假定体 K 在它中心上的次数是有限的,那么这个次数就是一个平方数 m^2. 曾經証明过对于 K 的对合 J 有三种可能情形发生:

I. J 将 Z 中每个元素都保持不变,而 K 中对称元素所組成的空間 S(在 Z 上)的維数是 $m(m+1)/2$;

II. J 将 Z 中每个元素都保持不变,而 K 中对称元素所組成的空間 S(在 Z 上)的維数是 $m(m-1)/2$;

III. J 在 Z 上的限制不是单位自同构,Z 中对称元素組成一个子域 Z_0,而 Z 是 Z_0 的一个可离二次扩张;这时 S 是 Z_0 上 m^2 維的向量空間.

在情形 I 和 II,J 称为第一类对合;在情形 III,J 称为第二类对合(如果 $J \neq 1$ 而且 K 是域,那么显然是后面的情形);我們注意,如果 J 是类型 I 的对合而且 $\alpha^J = -\alpha$,則对合 $\xi \to \alpha\xi^J\alpha^{-1}$ 就是类型 II 的对合.

这样,如果 J 是类型 I 的对合,就有 $U_n(K, f) = T_n(K, f)$(J. Dieudonné[13], 379 頁);特別,这个結果可以应用到辛羣的情形 ($J = 1$),于是我們看到射影羣 $PSp_n(K)$,即 $Sp_n(K)$ 对于它的中

心(此时它化为由1个元素或两个元素所組成的羣,依K的特征数是2或不是2而定)的商羣是单羣,除$K=\mathbf{F}_3$, $n=2$及$K=\mathbf{F}_2$, $n=2$或$n=4$三种情形(L. E. Dickson[1]). 此外,每个辛变换都是辛平延之积;我們还可以証明一个辛变换頂多是$n+1$个辛平延之积,而这个极大值可以达到(J. Dieudonné[19]).

如果J是类型I的对合,那么根据前面的結果可知,U_n中每个变换的行列式(§1)都等于1;对于类型II的对合,这个結果同样也成立,因为在这两种情形我們容易証明J在K^*/C上誘导出的自同构是单位自同构. 再者,这是当J为类型II的对合时仅有的已知一般性結果;我們在上面曾經指出,仅当K是广义四元数体时(对于$\nu=1$)才有更确切的結果. 我們知道,当$n\geqslant 3$时,T_n是U_n的换位子羣,可是这个結果当$n=2$时并不成立(見第四章§8).

当J是类型III的对合时,U_n/T_n的构造几乎不知道;这时我們只知道U_n中总存在行列式(§1)$\neq 1$的变换(J. Dieudonné[13], 384頁). 这就引导去研究由行列式$=1$的酉变换所組成的羣$U_n^+(K,f)$,可是当K不是域(而$\nu=1$时)并不知道U_n^+/T_n的构造. 当K是域($\nu\geqslant 1$而$J\neq 1$)时,我們有$U_n^+(K,f)=T_n(K,f)$ ($n\geqslant 2$),除$n=3$而$K=\mathbf{F}_4$的情形(L. E. Dickson[1,3], J. Dieudonné[4], 66—71頁);在例外情形,U_3^+/T_3是一个4阶的羣,它是两个2阶巡迴羣之积. 当f的指数$=0$时,羣$U_n^+(K,f)$也可以同样定义;当K是域时,商羣U_n/U_n^+与K中范为1的元素所組成的羣同构(所謂范是指,对于J的不变元素所組成的域K_0的范). 以$PU_n^+(K,f)$表$U_n^+(K,f)$在自然映射$u\rightarrow\bar{u}$下$PGL_n(K,f)$中的象;如果$\nu\geqslant 1$而K是域,就有$PU_n^+(K,f)\cong T_n(K,f)/W_n$.

最后我們附带指出,有限域上辛羣$Sp_{2m}(\mathbf{F}_q)$的阶是

$$(q^{2m}-1)q^{2m-1}(q^{2m-2}-1)q^{2m-3}\cdots(q^2-1)q,$$

而酉羣$U_n(\mathbf{F}_{q^2})$的阶是

$$(q^n-(-1)^n)q^{n-1}(q^{n-1}-(-1)^{n-1})q^{n-2}\cdots(q^2-1)q(q+1)$$

(L. E. Dickson[1], 94頁及134頁).

§6. 羣 $O_n(K,f)$（K的特征数 $\neq 2$）：旋轉羣与换位子羣

映射 $u \to \det(u)$ 是从 $O_n(K,f)$ 到羣 $\{-1, +1\}$ 上的一个表示，因此行列式等于 1 的正交变换組成 $O_n(K,f)$ 的一个指数 2 的正規子羣，我們把它記作 $O_n^+(K,f)$，称它为**旋轉羣**；O_n 中不属于 O_n^+ 的元素称为**反轉**．于是一个旋轉（或反轉）是**偶数个**（或**奇数个**）对称的乘积，这个个数永远可以取为 $\leqslant n$；由此推出，如果 n 是奇数（或偶数），那么每个旋轉（或反轉）至少将一个 $\neq 0$ 的向量**保持不变**．

对于 E 的一个子空間 V，永远存在将 V（整体地）保持不变的行列式为 -1 的正交变换，除非 $n = 2m$ 是偶数，$\nu = m$ 而 V 是极大維数 m 的一个全迷向子空間．由此推出，如果 V 和 W 是 E 的两个子空間而 f 在 $V \times V$ 上和 $W \times W$ 上的限制是等价的，那么永远存在一个旋轉 u 使得 $u(V) = W$（根据維特定理），除非 V 和 W 都是 $n/2$ 維的全迷向子空間．这些子空間对于羣 O_n^+ 而言分成两个传递类．此外，如果 V 和 W 是两个 $n/2$ 維的全迷向子空間，那么对于任何对称 s，我們都有 $\dim(V \cap s(W)) = \dim(V \cap W) \pm 1$．由此推出，如果 V 和 W 属于同一传递类，则 $\dim(V \cap W)$ 与 $n/2$ 同为奇数或同为偶数（即它們有相同的**奇偶性**），而反之亦然．

$O_n(K,f)$ 中的 $(n-2, 2)$-对合称为**反演**，显然反演是旋轉．

1）**当 $n \geqslant 3$ 时，每个旋轉都是反演之积．**

对 n 用归納法．如果 x 是一个非迷向向量，那么存在一个将 x 变到 $-x$ 的反演．如果 u 是一个旋轉，那么两个向量 $u(x) - x$ 和 $u(x) + x$ 中至少有一个是非迷向的．設 $u(x) + x$ 是非迷向的，那么就有一个与 $u(x) + x$ 正交而包有 $u(x) - x$ 的反迷向平面 P，于是以 P 为負空間的反演 v 将 x 变到 $u(x)$．設 $u(x) - x$ 是非迷向的，那么同样有一个反演将 x 变到 $-u(x)$，然后还有一个反演将 $-u(x)$ 变到 $u(x)$．因此我們永远可以化成 u 将一个非迷

向向量 x 保持不变的情形.研究 u 在与 x 正交的超平面上的限制,可以把它看作一个 $n-1$ 維的旋轉,最后就化到 $n=3$ 的情形.因为 O_2 里的每个旋轉頂多是两个对称的乘积,所以 O_3 中将一个非迷向向量保持不变的旋轉頂多是两个反演的乘积.

2) 当 $n \geqslant 3$ 时,如果 n 是奇数,$O_n^+(K, f)$ 的中心仅含单位元素;如果 n 是偶数,$O_n^+(K, f)$ 的中心由单位元素和变换 $x \rightarrow -x$ 組成. 实际上,与每个反演都交换的半綫性变换将一切非迷向平面保持不变,可是每条非迷向直綫显然都是两个非迷向平面的交;又根据 §3 的引理 1),每条迷向直綫也是两个非迷向平面的交;因此 O_n^+ 在 ΓL_n 中的中心化子是位似变换羣 H_n,由此即可推出我們所要証明的性质. 当 n 是奇数,羣 O_n 是羣 O_n^+ 与 O_n 的中心 $Z_n \cap O_n$ 的直乘积.

3) 当 $n=2$ 时,$O_2^+(K, f)$ 是交换羣. 为明确起見,分别研究指数 $\nu=1$ 和 $\nu=0$ 两种情形: a)如果 $\nu=1$,在 E 中选取一組由两个迷向向量所組成的基,我們就看到 O_2^+ 中的变换对于这組基的矩陣就是 $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$,其中 $\lambda \in K$;因此 $O_2^+(K, f)$ 与 K^* 同构; b)如果 $\nu=0$,在 E 中选取一組正交基之后我們可以假定 $f(x, x)=\xi_1^2+$ $+\alpha \xi_2^2$;而依假設 $-\alpha$ 不是 K 中的平方元素. 設 $K_1=K(\omega)$ 是将 $-\alpha$ 的一个平方根 ω 添加到 K 上而得到的 K 的二次扩张,我們可以把 E 与 K_1 視为同一,而将 E 中向量 $(1,0)$ 看作 K_1 中单位元素,于是,如果 $\zeta=\xi+\omega \eta$,那么它的共軛元素就是 $\bar{\zeta}=\xi-\omega \eta$ 而 $\zeta \bar{\zeta}=\xi^2+\alpha \eta^2$; $O_2^+(K, f)$ 中的一个旋轉 u 将 K_1 的单位元素映到范为 1 的一个元素 γ,因此可以把它与 K_1 的变换 $\zeta \rightarrow \gamma \zeta$ 視为同一. 换言之,$O_2^+(K, f)$ 与 K_1^* 中范为 1 的元素所組成的羣同构.

以 $\Omega_n(K, f)$ 表正交羣 $O_n(K, f)$ 的换位子羣.

4) 换位子羣 Ω_n 由任意两个互相共軛的对称乘积 $s(w s w^{-1})$ 所生成,它也由 O_n 中的平方元素所生成(L. E. Dickson[1], 218 頁, J. Dieudonné[4], 23 頁). 要証明一切换位子 $u v u^{-1} v^{-1}$ 都可以表成变换 $s(w s w^{-1})$,其中 s 为对称的乘积.我們对将 v 表成对称乘积时对称的个数用归納法,也可用同样的方法証明一切平方元素 v^2 属

于 Ω_n. 由此推出,羣 O_n/Ω_n 中任何 $\neq 1$ 的元素都是 2 阶的,因此只要知道羣的基数(有限的而且是形状 2^k 的,或无限的),这个阿倍尔的构造就完全确定了.

5) 当 $n \geqslant 3$ 时,羣 Ω_n 也是 O_n^+ 的换位子羣. 只要利用性质 1)再采用 4) 中的証明方法就可証明 O_n^+ 的换位子羣由 O_n^+ 中平方元素所生成. 另一方面,采用 4) 的第一部分的推理方法,我們就看到 Ω_n 由任意两个对称 s, t 的换位子 $sts^{-1}t^{-1} = (st)^2$ 所生成,因此 Ω_n 包含在 O_n^+ 的换位子羣之中,而 O_n^+ 的换位子羣包含在 Ω_n 之中是很显然的. 当 $n = 2$ 时,仍然有 $\Omega_n \subset O_n^+$,但这时已經知道 O_n^+ 是阿倍尔羣.

于是当 $n \geqslant 3$ 时, $O_n(K, f)$ 有一个正規羣鏈:

$$O_n \supset O_n^+ \supset \Omega_n \supset \Omega_n \cap Z_n \supset \{1\}.$$

当 n 是奇数时, 我們已經看到 $O_n^+ \cap Z_n$ 化为单位元素, 因此 $\Omega_n \cap Z_n$ 亦化为单位元素. 但无論 n 是奇数或偶数, 只要 $n \geqslant 3$, $\Omega_n \cap Z_n$ 就是 Ω_n 的中心. 实际上,与 Ω_n 中一切元素都交换的半綫性变换 u, 特别与将 $n-2$ 維非迷向子空間 Q 中每个元素都保持不变的变换 v 的平方 v^2 相交换, 而我們可以把将 Q 中每个元素都保持不变的变换看作是与 Q 正交的平面 Q^0 里的正交变换. 除非 $K = \mathbf{F}_3$ 而且 Q^0 是双曲平面,永远存在 Q^0 里的正交变换 v 使得 v^2 不等于单位元素; 因此 u 应該将每个 $n-2$ 維非迷向子空間保持不变, 将一切非迷向向量都保持不变, 那么象 3) 中一样可以看出 u 是位似变换. 如果 $K = \mathbf{F}_3$, u 就将椭圓平面 ($f(x, x)$ 在它上面的限制对于一組正交基而言是 $\xi_1^2 + \xi_2^2$) 都保持不变; 可是,当 $n \geqslant 4$ 时,每条非迷向直綫都是两个椭圓平面的交,由此推出我們的結論这时也成立; 最后当 $n=3$ 时, E 中有一組基使得三个坐标平面都是椭圓平面,而且是 E 中仅有的椭圓平面,这时 u 只能将基向量保持不变或将它改变符号, 我們容易推知在这些变换中只有单位变换与 Ω_n 中的变换都交换.

以 $PO_n^+(K, f)$ 和 $P\Omega_n(K, f)$ 分别表 $O_n^+(K, f)$ 和 $\Omega_n(K, f)$ 在从 $GL_n(K)$ 到 $PGL_n(K)$ 的自然映象下的象, 显然它們分别与

$O_n^+/(O_n^+\cap Z_n)$ 和 $\Omega_n^+/(\Omega_n^+\cap Z_n)$ 同构.

在下面几节中,我們要闡述上面所写出的商羣的已知結果,这些商羣是正交羣的正規羣鏈中的.

§7. 二次形式的克黎福特代数

(K 的特征数 $\neq 2$)

象前面一样,我們用 $f(x, y)$ 表 K 上 n 維向量空間 E 上的一个非退化的对称双綫性形式. 在 E 上的张量代数 $T(E)$ 中考察由形如 $x\otimes y+y\otimes x-2f(x, y)$ 的元素所生成的双边理想 $\mathfrak{a}$, 我們把商代数 $C(f)=T(E)/\mathfrak{a}$ 称为形式 f 的克黎福特代数 (W. K. Clifford[1,2], R. Lipschitz[1]). 設 $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 E 的一組正交基, 以 e_i 表在代数 $C(f)$ 中 $a_i \bmod \mathfrak{a}$ 的剩余类;对于整数 $1, 2, \cdots, n$ 的集合的任意子集 H, 令 $e_H=e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_p}$, 其中 $(i_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ 是 H 中元素依增长为序的序列(如果 H 是空的,則 $e_H=1$). 可以証明 (C. Chevalley[1]), 这些 e_H 組成 $C(f)$ 在 K 上的一組基,其个数为 2^n, 其乘法表为

$$e_Ae_B=\gamma_{A,B}e_{A\triangle B},\tag{2}$$

其中 $A\triangle B$ 是整数 $1, 2, \cdots, n$ 的集合的子集所組成的布尔环中的加法(换言之, $A\triangle B$ 的特征函数是 A 的特征函数与 B 的特征函数之和, mod 2)

$$\gamma_{A,B}=(-1)^{\rho(A,B)}\prod_{i\in A\cap B}f(a_i, a_i),\tag{3}$$

而 $\rho(A, B)$ 是将 A 和 B 幷置所得序列的"反序数",換言之,

$$\rho(A, B)=\sum_{j\in B}\rho(A, j),\tag{4}$$

$\rho(A, j)$ 表 A 中元素 $>j$ 的个数.

特别,我們有 $e_ie_j=-e_je_i$ 对 $j\neq i$ 而 $e_i^2=f(a_i, a_i)$ 对一切指标 i.

对应于最多含 p 个元素的子集 H 的那些 e_H 的綫性組合集合 $L_p(0\leqslant p\leqslant n)$ 是 $C(f)$ 的一个子空間,而且 L_p 与基 (a_i) 的选取无关.

特别，向量空間 E 可以看作是 e_i 的綫性組合所組成的 $C(f)$ 的子空間，于是将 a_i 与 e_i 視为同一。对于 E 中任意一对元素 x, y，在 $C(f)$ 中有

$$xy + yx = 2f(x, y), \tag{5}$$

而特别有

$$x^2 = f(x, x). \tag{6}$$

显然，$e_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 和单位元素生成 $C(f)$。

1）当 n 是偶数时，$C(f)$ 的中心是 K；当 n 是奇数时，$C(f)$ 的中心就等于 $K + Ke_1e_2\cdots e_n$。实际上，将一个元素 $z = \sum_A \gamma_A e_A$ 与 e_i 交换的关系式写出就可看到 $\gamma_A = 0$ 对一切包有奇数个指标 $\neq i$ 的子集 A，由此即得結果。

对应于含偶数个元素的子集 H 的那些 e_H 的綫性組合組成 $C(f)$ 的一个子代数 $C^+(f)$，在 K 上的次数是 2^{n-1}，与基(a_i)的选取无关，而且它由乘积 $e_ie_j(i < j)$ 以及单位元素所生成。对应于含奇数个元素的子集 H 的那些 e_H 的綫性組合組成 $C(f)$ 的一个子空間 $C^-(f)$，与 $C^+(f)$ 互补而且也与基(a_i)的选取无关。为了簡单起見，我們說 $C^+(f)$ 中的元素是偶数次的，而 $C^-(f)$ 中的元素是奇数次的。

2）当 n 是奇数时，$C^+(f)$ 的中心等于 K，当 n 是偶数时，$C^+(f)$ 的中心等于 $K + Ke_1e_2\cdots e_n$。仍采用上面的記号。如果我們将 $z \in C^+(f)$ 与 e_ie_j 交换的关系式写出，就会看到 $\gamma_A = 0$ 对于 $j \in A, i \notin A$ 的子集 A，由此即推出結果。

关于克黎福特代数及其与正交羣的“旋量表示”的关系，更深入的代数研究可以参考薛佛侶 (C. Chevalley)[1] 和艾希勒 (M. Eichler)[2] 的书。至于利用 $C(f)$ 去研究正交羣 $O_n(K, f)$ 的构造所根据的初等方法并不需要这些結果，我們基本上根据艾希勒 (M. Eichler)[2] 闡述如下。

3）对于每一个正交变换 $u \in O_n(K, f)$，都存在一个可逆元素 $s_u \in C(f)$ 而且 s_u 具下列諸性質：

a）如果 u 是一个旋轉，s_u 就是偶次的而且有

$$u(x) = s \quad s^{\ 1} \tag{7}$$

对一切 $x \in E$；

b) 如果 u 是一个反轉，s_u 就是奇次的且有

$$u(x) = -s_u x s_u^{-1} \tag{8}$$

对一切 $x \in E$.

此外，当 u 是一个旋轉时，任何元素 $t \in C^+(f)$ 使得 $txt^{-1} = u(x)$ 对一切 $x \in E$ 都与 s_u 成比例；当 u 是一个反轉时，任何元素 $t \in C^-(f)$ 使得 $txt^{-1} = -u(x)$ 对一切 $x \in E$ 都与 s_u 成比例.

实际上，首先設 u 是对于与一个非迷向向量 $a \in E$ 正交的超平面的对称，这时，根据(5)和(6)就有

$$u(x) = x - 2\frac{f(x, a)}{f(a, a)}a = x - (ax + xa)a^{-2}a =$$

$$= -axa^{-1}. \tag{9}$$

如果 $u = v_1v_2\cdots v_p$，其中 v_i 是对于与一个非迷向向量 a_i 正交的超平面的对称，那么

$$u(x) = (-1)^p(a_1a_2\cdots a_p)x(a_1a_2\cdots a_p)^{-1},$$

于是令 $s_u = a_1a_2\cdots a_p$ 即推出(7)或(8). 此外，如果 t 适合上面所説的条件，那么 $s_u^{-1}t$ 就在 $C^+(f)$ 中而且与 E 中每个元素都交换，因此就在 $C(f)$ 的中心中也在 $C^+(f)$ 的中心中；根据 1) 和 2)即推出它在 K 中.

4) 反之，对于任意可逆元素 $s \in C(f)$，如果 s 具性質 $sEs^{-1} = E$，那么 E 的变換 $x \to sxs^{-1}$ 就是羣 $O_n(K, f)$ 中的一个变換；此外，如果 $s \in C^+(f)$，这个变換就是一个旋轉.

第一个断言由(5)立即推出. 另一方面，如果对于 $s \in C^+(f)$，变換 $x \to v(x) = sxs^{-1}$ 是一个反轉，那么根据 3) 就存在一个奇数次的可逆元素 $t \in C(f)$，使得 $v(x) = -txt^{-1}$. 于是元素 $r = t^{-1}s$ 就使得 $rxr^{-1} = -x$ 对一切 $x \in E$. 如果令 $r = \sum\limits_A \gamma_A e_A$，而且将 $re_ir^{-1} = -e_i$ 对 $1 \leqslant i \leqslant n$ 写出，我們就看到当 A 包有偶数个 $\neq i$ 的指标时 $\gamma_A = 0$；于是我們只能有 $r = \gamma e_1e_2\cdots e_n$ 而且 n 只能是

偶数;可是这时 $s = tr$ 是奇数次的,这就和假設相抵触.

現在我們注意,在张量代数 $T(E)$ 中,綫性映射 J 使得 $(x_1 \otimes \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_p)^J = x_p \otimes x_{p-1} \otimes \cdots \otimes x_1$ 者是它的一个反自同构,显然它将理想 $\mathfrak{a}$ 保持不变,因之它誘导出商代数 $C(f) = T(f)/\mathfrak{a}$,卽克黎福特代数的一个对合性反自同构,使得

$$(x_1 x_2 \cdots x_p)^J = x_p x_{p-1} x_{p-2} \cdots x_1 \tag{10}$$

对 $x_i \in E$, $1 \leqslant p \leqslant n$;显然 J 将 $C^+(f)$ 和 $C^-(f)$(整体地)保持不变.

現在假定 u 是任意一个旋轉,而且它是对于分别与非迷向向量 $a_1, a_2, \cdots, a_{2p}$ 正交的 $2p$ 个超平面的对称的乘积,于是我們有公式(7)而 $s_u = a_1 a_2 \cdots a_{2p}$. 那么根据(6)我們有 $s_u s_u^J = a_1 a_2 \cdots a_{2p} a_{2p} \cdots a_2 a_1 = f(a_1, a_1) f(a_2, a_2) \cdots f(a_{2p}, a_{2p}) \neq 0$;如果用 λs_u 而 $\lambda \in K^*$ 代替 s_u,那么数量 $s_u s_u^J$ 就乘上了 λ^2;于是由 3)推出,数量 $s_u s_u^J$ 模 K^* 中平方元素的羣 K^{*2} 所属之剩余类是一个只与 u 有关的元素 $\theta(u)$. 此外,对于两个旋轉 u, v,由 3)推出 s_{uv} 和 $s_u s_v$ 只差一个数量因子,因此

$$\theta(uv) = \theta(u)\theta(v); \tag{11}$$

換句話說,θ 是从羣 O_n^+ 到羣 K^*/K^{*2} 中由形状 $f(x, x) f(y, y)$(x, y 是 E 中任意非迷向向量)的元素所属的剩余类所生成的子羣上的一个表示. 我們称 $\theta(u)$ 为 u 的旋量范数 θ 的核 $O_n'(K, f) = \theta^{-1}(1)$,包有换位子羣 $\Omega_n(K, f)$;当 $n \geqslant 3$ 时,这是显然的,因为这时 Ω_n 是 O_n^+ 的换位子羣;而当 $n = 2$ 时,这也是正确的,因为如果 s, s' 是两个共軛的对称,它們分别对应于与向量 a, a' 正交的两个超平面而且 $f(a, a) = f(a', a') \neq 0$,那么 $\theta(ss') = (f(aa))^2$.

§8. 羣 $O_n(K, f)$ 的构造

(K 的特征数 $\neq 2$, f 的指数 $\nu \geqslant 1$, $n \geqslant 2$)

I. O_n^+/Ω_n 和 $\Omega_n \cap Z_n$ 的构造

回忆 §5,我們把一个正交变换 u(或一个旋轉 u)称为双曲

的，如果它将与一个双曲平面正交的 $n-2$ 維子空間中的向量都保持不变.

1) 如果 $\nu \geqslant 1$，則任何正交变换 u 都是双曲变换之积. 只要对于对应于一个(非迷向)超平面 H 的对称 s 証明这件事实就够了；如果 $a \neq 0$ 是一个与 H 正交的向量，那么存在一个不与 a 正交的迷向向量 b（第一章 § 11, 2)）：由 a 和 b 所决定的平面 P 是一个双曲平面而 s 将 P^0 中一切向量都保持不变；因此 s 是一个双曲变换.

2) 設 P 是一个双曲平面. 任何双曲变换(或旋轉) u 都可以写作 $u = sv$，其中 s 是平面 P 的一个双曲变换(或旋轉)而 $v \in \Omega_n$.

如果 u 是一个平面 P' 的双曲变换，那么这是显然的，因为根据維特定理存在一个 $t \in O_n$ 使得 $t(P) = P'$，于是 $u = tst^{-1} = s(s^{-1}tst^{-1})$. 如果 u 是 p 的双曲变换之积，我們可以对 p 用归納法. 最后，如果 u 是旋轉，因为 v 也是旋轉，所以 s 也是旋轉.

关于 2) 的另外一个証明可以参考薛佛侣(C. Chevalley)[1]，53—55 頁.

3) 設 P 和 P' 是两个双曲平面，那么存在一个变换 $v \in \Omega_n(K, f)$ 使得 $v(P) = P'$. 当 $n = 2$ 时，这个命题显然成立；如果 $n > 2$，那么根据維特定理存在一个 $u \in O_n$ 使得 $u(P) = P'$；再根据 2) 我們有 $u = sv$，其中 $v \in \Omega_n$ 而 s 是平面 P' 的双曲旋轉；因为 $s(P') = P'$，所以 $v(P) = P'$.

这些結果使我們能够証明下面这个定理(M. Eichler[2])：

如果 $\geqslant 1$ 而 $n \geqslant 2$，那么旋量范数是 O_n^+ 在羣 K^*/K^{*2} 上的一个表示，其核为换位子羣 $\Omega_n(K, f)$.

实际上，因为 Ω_n 属于 θ 的核，所以根据 2) 我們有 $\theta(sv) = \theta(s)$；因此化到了研究 $n = 2, \nu = 1$ 这个情形. 选取一組基，它由两个迷向向量 e_1, e_2 組成而 $f(e_1, e_2) = 1$，那么对于这組基而言，一个旋轉 s 的矩陣就是 $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix}$；显然它是两个对称的乘积，其中之一是对于与 $e_1 - e_2$ 正交的直綫的对称，而另一个是对于与 $\alpha e_1 - e_2$ 正交的直綫的对称. 可是，$f(e_1 - e_2, e_1 - e_2) = -2$，$f(\alpha e_1 - e_2,$

$\alpha e_1 - e_2) = -2\alpha$，由此推出 $\theta(s) = \hat{\alpha}$（$\alpha \in K^*$ 在羣 K^*/K^{*2} 中之剩余类）。于是由此立刻推出定理，因为，若 $\theta(s)=1$，那么 $\alpha=\beta^2$，因之 s 是旋轉 $\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta^{-1}\end{pmatrix}$ 的平方而（§ 6）属于 Ω_n。

从这个定理立刻推出以下諸系：

a）如果 $n \geqslant 2$ 而 $\nu \geqslant 1$，那么 $O_n^+(K, f)/\Omega_n(K, f)$ 与 K^*/K^{*2} 同构；

b）如果 $n \geqslant 2$ 而 $\nu \geqslant 1$，那么对称 $x \to -x$ 属于 $\Omega_n(K, f)$ 的充分必要条件是 n 为偶数而且 f 的判别式是 K 的一个平方元素。实际上，对称 $x \to -x$ 是对于对应于 f 的一組正交基的 n 个坐标超平面的 n 个对称的乘积；因此这个变换的旋量范数是 f 对于这組基的判别式 $\bmod K^{*2}$ 所属之剩余类。更进一步，我們指出，f 的判别式是一个平方元素且永远是 $x \to -x$ 属于 O_n' 的充分必要条件（既使当 $\nu = 0$ 时）。

§ 9. 羣 $O_n(K, f)$ 的构造

（K 的特征数 $\neq 2$，f 的指数 $\nu \geqslant 1$，$n \geqslant 3$）

II. 羣 $\Omega_n/(\Omega_n \cap Z_n) = P\Omega_n(K, f)$ 的构造

当 $n = 3$ 和 $n = 4$ 时，克黎福特代数的特殊构造給出它們相应的正交羣的构造的重要知識（也可以参考第四章 § 8），我們开始来研究这两个情形而不对指数 ν 作任何限制（即它可以取 0 为值）。

A）$n = 3$。設 $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ 是 E 的一組正交基，子代数 $C^+(f)$ 是 4 維的；它有一組基由元素 1 和三个元素

$$i_1 = e_2 e_3, \quad i_2 = e_3 e_1, \quad i_3 = \alpha_3 e_1 e_2 \tag{12}$$

所組成，它的乘法表是

$$\left.\begin{aligned} &i_h i_k = -i_k i_h \qquad \text{若 } h \neq k, \\ &i_1^2 = \beta_1, \quad i_2^2 = \beta_2, \quad i_3^2 = -\beta_1\beta_2, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

其中我們令 $\alpha_k = f(e_k, e_k)$，$\beta_1 = -\alpha_2\alpha_3$，$\beta_2 = -\alpha_3\alpha_1$。因此 $C^+(f)$ 是域 K 上对应于 K 的元素 β_1, β_2 的广义四元数代数。§ 7 的結果可

以确切地表述如下：

1）对于任何旋轉 $u\in O_3^+$，s_u 是一个可逆四元数，反之，任何可逆四元数都可以表成形状 s_u.

第一部分在 § 7 中已經証明．为要証明它的逆命題，可以如下进行(M. Eichler[2])：我們說一个四元数 z 是純四元数，如果它不包含純量分量；$C^+(f)$ 的反自同构 J (§ 7) 是这个代数中将 K 中元素保持不变的反自同构，而純四元数也可以定义为适合条件 $z^J = -z$ 的四元数．另一方面，令 $j = e_1e_2e_3$，将 E 看作拓展到 $C(f)$ 中（即看作是 $C(f)$ 的子空間），那么映射 $x \to xj$ 就是向量空間 E 与純四元数的向量空間之間的一个同构．可是我們立刻看到（因为 $N(t) = tt^J = t^Jt\in K$ 对一切四元数 t）；对于任何純四元数 z，只要 t 是一个可逆四元数，tzt^{-1} 就仍然是純四元数；因为对于任何 $x\in E$，$txt^{-1} = t(xj)t^{-1}j^{-1}$，所以 $txt^{-1}\in E$，这就証明了本命題（参看 § 7.4)）.

由此結果立刻推出以下結果作为系

2）羣 $O_3^+(K, f)$ 与羣 C^{+*}/K^* 同构，其中 C^{+*} 表 $C^+(f)$ 中可逆四元数所組成的羣；羣 $O_3'(K, f)$ 与范 $N(t) = 1$ 的那些四元数 t 所組成的羣对于羣 $\{-1, +1\}$ 的商羣同构.

我們知道，一个四元数 z 是可逆的，其条件是它的范 $N(z) = zz^J$ 不等于零．不难証明，在純四元数所組成的向量空間上双綫性形式 $xy^J + yx^J$ 与形式 $2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 f$ 等价，而且如果 $N(z) = 0$ 对于某一个四元数 $z\neq 0$，那就存在一个純四元数 $z'\neq 0$ 使得 $N(z')=0$．因此，如果 $\nu = 0$，$C^+(f)$ 就是一个体．反之，如果 $\nu = 1$，$C^+(f)$ 中就有零因子存在．因此 $C^+(f)$ 必需和 K 上 2 級矩陣代数 $K_{(2)}$ 同构．于是羣 C^{+*} 与 $GL_2(K)$ 同构，因而（依 § 2）：

3）如果 $\nu = 1$，羣 $O_3^+(K, f)$ 就与射影羣 $PGL_2(K)$ 同构，而它的換位子羣 $\Omega_3(K,f)$ 就与 $PSL_2(K)$ 同构，因此，如果 $K \neq \mathbf{F}_3$，羣 $\Omega_3(K, f)$ 就是单羣.

B）$n = 4$．設 $(e_i)_{1\leq i\leq 4}$ 是 E 的一組正交基，則 $C^+(f)$ 的中心 T 是 K 与 $Ke_1e_2e_3e_4$ 的直和；此外，我們有 $(e_1e_2e_3e_4)^2 = \Delta$，$\Delta$ 表

f 对于基(e_i)的判别式. 根据 Δ 是否为K中平方元素,T就是两个与K同构的域的直和或K的一个二次扩张. 根据維特定理,我們知道,当 $\nu=2$ 时第一个情形一定发生;当 $\nu=1$ 时第二个情形一定发生;当 $\nu=0$ 时,这两个情形都可以发生.

无論是那一种情形, 由 (12) 所定义的元素 i_h 生成 $C^+(f)$ 的一个子代数 L, 它是K上的一个广义四元数代数;此外, 因为 $T\cap L=K$ 而T的每一个元素与L的每一个元素都交换,所以 $C^+(f)$ 可以看作是张量乘积 $T\otimes L$. 如果 $j=e_1e_2e_3e_4$, 那么

$$ji_1=-\alpha_2\alpha_3e_1e_4,\quad ji_2=-\alpha_3\alpha_1e_2e_4,\quad ji_3=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3e_3e_4.$$

对于任何元素 $t=\lambda_0+\lambda_1i_1+\lambda_2i_2+\lambda_3i_3\in C^+(f)$ 而 $\lambda_h\in T$, 我們有 $t^J=\lambda_0-\lambda_1i_1-\lambda_2i_2-\lambda_3i_3$, 因为 J 将T中元素保持不变; 由此推出 $N(t)=tt^J=\lambda_0^2-\lambda_1^2\beta_1-\lambda_2^2\beta_2+\lambda_3^2\beta_1\beta_2$ 属于 T.

4) $T\otimes L$ 中一个可逆元素 t 可表成形状 s_u $(u\in O_4^+)$ 的充分必要条件是 $N(t)$ 属于 K (M. Eichler[2]).

实际上,这个条件显然是必要的(§7); 反之, 如果 $N(t)\in K$, 那么对于任何 $x\in E$, $y=txt^{-1}=txt^J/N(t)$ 是 $C(f)$ 中奇数次元素的綫性組合,可是因为 $y^J=y$,所以这个綫性組合中不能包含 3 次元素,因此它属于 E,这就証明了这个判断法则(§7.4)).

以上的討論証明了羣 $O_4'(K,f)$ 与 $T\otimes L$ 中范 $N(t)\doteq 1$ 的四元数所組成的羣对于 $\{-1,+1\}$ 的商羣同构.

現在分别研究下面两种情形:

BI) Δ 不是K中平方元素. 如果以 $f_1(x,y)$ 表 $f(x,y)$ 在与 e_4 正交的超平面H上的限制, 那么由 2) 推出, 羣 $O_4'(K,f)$ 与羣 $O_3'(K(\sqrt{\Delta}),f_1)$ 同构. 如果 f 的指数 ν 等于 1,那么可以假定 f_1 的指数也等于 1,于是根据 3) 就有

5) 如果 $\nu\geqslant 1$,羣 $\Omega_4(K,f)$是单羣而且与羣 $PSL_2(K(\sqrt{\Delta}))$ 同构(注意,如果K是有限域, 那么 $K(\sqrt{\Delta})$ 至少有 9 个元素).

如果 $\nu=0$, 那么形式 f_1 在 $K(\sqrt{\Delta})$ 上的指数也是 0. 实际上, 如果 H 中有两个非零向量 x, y 具性质 $f(x+\sqrt{\Delta}y,x+\sqrt{\Delta}y)=0$, 我們就由此推出 x 和 y 正交而且 $f(x,x)=$

$= -\Delta f(y, y)$. 于是根据 Δ 的定义,由此又可推出在与 x 和 y 正交的平面上存在一个(对于 f 而言的)迷向向量,这与假設相矛盾.

BII) Δ 是 K 中一个平方元素 ω^2. 設 $c' = (1 + \omega^{-1}j)/2$, $c'' = (1 - \omega^{-1}j)/2$; c' 和 c'' 就是 $C^+(f)$ 中的两个冪等元素, 而 $C^+(f)$ 就是与 L 同构的两个四元数代数 Lc' 和 Lc'' 的直和(Lc' 和 Lc'' 的中核分别为 Kc' 和 Kc''). $C^+(f)$ 中任何可逆元素 t 都可以写作 $t = ac' + b^{-1}c''$,其中 a, b 属于 L,而条件 $N(t) \in K$ 与 $N(a)N(b) = 1$ 等价. 特别, $N(t) = 1$ 的充分必要条件是 $N(a) = N(b) = 1$. 如果再注意 $O_4' \cap Z_4$ 是一个含两个元素的羣(§7), 那么就看到 $O_4'/(O_4' \cap Z_4)$ 与羣的直乘积 $O_3'(K, f_1) \times O_3'(K, f_1)$ 同构. 特别有

6) 如果 $\nu = 2$, 羣 $\Omega_4/(\Omega_4 \cap Z_4)$ 就与羣的直乘积 $PSL_2(K) \times PSL_2(K)$ 同构(如果 $K \neq \mathbf{F}_3$, 直乘积的因子就是单羣).

可以用下述方式确切地表述这些結果: 对于任何 $x \in E$,我們有 $xj = -jx$, 因此 $c'x = xc''$, $c''x = xc'$; 因为 $t^{-1} = a^{-1}c' + bc''$, 我們有 $txt^{-1} = (axb)c' + (b^{-1}xa^{-1})c'' = (axb)c' + (axb)^Jc''$(由于关系式 $N(a)N(b) = 1$). 另一方面, 为了簡单起見, 可以假定 $f(e_4, e_4) = 1$(即将 f 乘上一个常数),那么任何元素 $x \in E$ 都可以唯一地写作 $x = e_4\alpha + j_0z$, 其中 $\alpha \in K$, $j_0 = e_1e_2e_3$ 而 z 是 L 中一个純四元数. 将四元数 $\tilde{x} = \alpha + z$ 与 x 相应,求与 txt^{-1} 相应的四元数;考虑到 e_4 与 L 中元素都交換而 j_0 与 L 中元素都反交換以及关系式 $\Delta^{-1}j_0j = -e_4$, 我們就能証明与 txt^{-1} 相应的四元数是 $a\tilde{x}b$. 借助于綫性映射 $x \to \tilde{x}$ 将 E 和 L 視为同一之后我們就看到 O_4^+ 中每个旋轉都可以写作 $y \to ayb$, 其中 a 和 b 是两个四元数具性質 $N(a)N(b) = 1$, 而且反之亦然.

C) $n \geqslant 5$ 我們有下面的基本定理 (L. E. Dickson[1,2,3], J. Dieudonné[4]):

如果 $n \geqslant 5$ 而 $\nu \geqslant 1$, 則羣 $\Omega_n/(\Omega_n \cap Z_n)$ 是单羣.

狄多涅(J. Dieudonné[4])中的証明利用了 3,4,5 及 6 个变数的正交羣的特殊性質(参考第四章 § 8);艾希勒(M. Eichler[2])中

的証明用到了許多矩陣計算，它們的几何解释并不簡单；我們将給出第三个証明，当 $K \neq \mathbf{F}_3$ 时它只用到羣 $O_3(K, f)$ 的构造而当 $K = \mathbf{F}_3$, $n \geqslant 6$ 时，它只用到 $O_4(K, f)$ 的构造.

I. $K \neq \mathbf{F}_3$. 設 G 是 Ω_n 的一个正規子羣，而 G 不包在 Ω_n 的中核之中；我們分以下几步来証明 $G = \Omega_n$:

Ia) 如果 G 包含一个双曲旋轉的平方（它不等于单位元素），則 $G = \Omega_n$. 設 s, s' 是两个互相共軛的对称，它們分别是对于与非迷向向量 a, a' 正交的超平面的对称，而且 $f(a, a) = f(a', a')$；只需要証明 $ss' \in G$（§ 6, 4)）. 設 P 是由 a 和 a' 所决定的(非全迷向的)平面，那么存在一个 3 維非迷向子空間 V，它包有 P 而且至少包含一个迷向向量. 实际上，如果 P 是一个迷向平面，設 bK 是 P 中唯一的迷向直綫，$c \in E$ 是一个不与 b 正交的迷向向量，那么 $cK + P = V$ 就不能是迷向的，因为 V 中与 V 正交的迷向向量 x 不能与 b 共綫也不属于平面 $bK + cK$（否則它就是全迷向的，因而与假設相抵触）；于是平面 $xK + cK$ 就是全迷向的而且与 P 交于一条异于 bK 的迷向直綫. 这是不可能的. 如果 P 是一个双曲平面，設 c 是任意一个与 P 正交的非迷向直綫，那么 $V = cK + P$ 就滿足要求. 如果 P 不含迷向向量而 $c \in E$ 是不与 P 正交的一个迷向向量，那么 $cK + P = V$ 就不是迷向的，因为 V 中与 V 正交的迷向向量不能与 c 共綫，因之 $cK + xK$ 是一个全迷向平面，它就与 P 交于一条迷向直綫. 这和假設相矛盾.

这样，子空間 V^0 中的元素就被 $u = ss'$ 保持不变，因此 u 可以看作属于 $\Omega_3(K, f_1)$，其中 f_1 是 f 在 $V \times V$ 上的限制. 設 v 是双曲平面 Q 上的一个双曲旋轉而 $v^2 \in G$，同时 $v^2 \neq 1$；在 V 中存在一个双曲平面 Q' 而且存在一个变换 $w \in \Omega_n$ 使得 $w(Q) = Q'$（§ 8, 3)）；于是变换 $wv^2w^{-1} = (wvw^{-1})^2$ 就属于 Ω_n 而且是平面 Q' 上的一个双曲旋轉的平方；另一方面，依假設我們有 $wv^2w^{-1} \in G$. 根据 3)，由 wv^2w^{-1} 在 V 上的限制所生成的 $\Omega_3(K, f_1)$ 的正規子羣与 $\Omega_3(K, f_1)$ 相等，因此 G 包含 u.

Ib) G 包含一个双曲旋轉的平方（而且它不等于单位元素），

我們順次証明以下諸点:—

α) G 包有一个变换，它将一个向量 $a\neq 0$ 保持不变．实际上，設 $u\in G$, $u\notin Z_n$, 至少存在一个双曲平面 R 使得 $u(R)\neq R$, 否則 u 就将 E 中条条直綫都保持不变(§3,1)),因而是一个位似变换．設 v 是平面 R 的一个双曲旋轉而且 $v^2\neq 1$, 那么 $u_1=uv^2u^{-1}v^{-2}$ 属于 G 而且 u_1 不是一个位似变换．显然 u_1 将 $R^0\cap(u(R))^0$ 中的点都保持不变,而(因为 $n\geqslant 5$ 这个假設)它的維数 $\geqslant 1$.

以下假設 $u\in G$, $u\neq 1$ 而且 $u(a)=a$ 对一个 $a\neq 0$.

β) 首先假設 a 是迷向向量．設 b 是一个向量使得 $f(a,b)\neq 0$, 而 $(c_i)_{3<i<n}$ 是双曲平面 $aK+bK$ 的正交子空間中的一組正交基; 向量 $e_1=a$, $e_2=b$ 及 $e_i=b+c_i$ 对 $i\geqslant 3$ 就組成 E 的一組基, 而平面 $P_i=e_1K+e_iK$ $(i\geqslant 2)$ 都是双曲平面．u 不能将每一个 P_i 都(整体地)保持不变，因为一个双曲平面上的正交变换如果将一个迷向向量保持不变,就一定是单位变换．因此有一个包含 a 的双曲平面 P 存在,使得 $u(P)\neq P$．先假定 $V=P+u(P)$ 是一个非迷向子空間;如果 v 是平面 P 的一个双曲旋轉而且 $v^2\neq 1$, 那么 $w=v^{-2}uv^2u^{-1}$ 就属于 G 而且 w 将 V^0 中元素都保持不变．我們可以把 w 看作属于 $\Omega_3(K,f_1)$,其中 f_1 是 f 在 $V\times V$ 上的限制．因为 w 不是单位元素,由 $\Omega_3(K,f_1)$ 的单純性就推出 G 包含一个包在 V 中的双曲平面的一个双曲旋轉的平方．反之，如果 V 是迷向的,因为 V 包有双曲平面，所以 $V^0\subset V$ 不可能发生;象上面一样来定义 w, 我們就看到 w 将 V^0 中的非迷向向量保持不变,这就化为下面一种情形．

γ) 其次我們假定 a 是非迷向的,可是任何包含 a 和一个迷向向量 b 的平面 P 都被 u 保持不变; 如果 P 是迷向的, u 就将 bK 保持不变; 如果 P 是非迷向的, u 就将 bK 保持不变或将 bK 与 P 中另外一条迷向直綫互换．无論是那一种情形, u^2 都将 E 中每条迷向直綫保持不变,因此它是位似变换(§2,1));又因为 $u^2(a)=a$, 所以 $u^2=1$, 即 u 是一个对合．設 V 和 $W=V^0$ 分别是 u 的正子空間和負子空間(第一章§14)，因为 u 是一个旋轉,所以 W 的維

数至少是 2.

$\therefore$ E 中存在一个迷向向量 c，它既不属于 V 也不属于 W，而且如果 $c = c' + c''$，其中 $c' \in V$，$c'' \in W$，则 c' 和 c'' 都不是迷向的（如果其中有一个是迷向的，那么另外一个也是迷向的，因为 c 是迷向的）．如果子空間 V 和 W 都不包含迷向向量，这件事实是很显然的．反之，假若 W 包含迷向向量，我們就考察 V 中一个非迷向向量 z，而将上面的注意应用到 E 的非迷向子空間 $zK + W$ 上．由此即可証明这件事实．

假設迷向向量 c 具上述性质，再假設 $P \subset W$ 是包含 c'' 的一个非迷向平面，存在一个向量 $d \in P$ 而 d 不与 c'' 共綫，不与 c'' 正交，也不与 c 正交（因为任何平面都至少包含 4 条不同的直綫，而 c 和 c'' 都不与 P 正交）．于是平面 $Q = cK + dK$ 就是一个双曲平面．我們来証明 3 維子空間 $R = Q + u(Q)$ 是非迷向的．否則，R 中就有一个向量 $z \neq 0$ 与 R 正交；因为 $u(R) = R$，$u(z)$ 也和 R 正交，因此 $y = z - u(z)$ 也和 R 正交．我們不能有 $y = 0$，否則就有 $z \in V$，于是 $z \in c'K$；这是不可能的，因为 c' 不是迷向的．因此我們有 $y \in W \cap R = P$ 而 y 与 P 正交，这仍然与假設相矛盾．証明的最后一部分和 β) 里的是完全一样的．

δ) 假設 a 是非迷向的，可是存在一个包含 a 的双曲平面 P 使得 $u(P) \neq P$，这时如果 $V = P + u(P)$ 是一个非迷向子空間，那么可以象前面一样将証明进行下去．否則，在与 a 正交的非迷向超平面 H 中就存在迷向向量，这就化为下面一种情形．

ε) 假定与 a 正交的超平面 H 中存在迷向向量，旋轉 u 将 H（全局地）保持不变；如果它将 H 中一切迷向直綫都保持不变，它就是 H 里的一个位似变换；又因为 $u \neq 1$，所以 u 在 H 中就是对称 $x \to -x$；这样就化为 γ) 中所討論的情形．否則，就存在一个与 a 正交的迷向向量而包含 a 和 b 的迷向平面 P 不被 u 保持不变．設 c 是 P 中一个不与 a 共綫的非迷向向量而且 $f(a, a) = f(c, c)$，再設 s_a 和 s_c 分別是对于与 a 和 c 正交的超平面的对称，于是 $v = s_a s_c \in \Omega_n$．如果 $c' = u(c)$，則 $v' = uvu^{-1} = s_a s_{c'}$，$s_{c'}$ 是对于与 c' 正

交的超平面的对称．这时 $w = v'^{-1}v = uv^{-1}u^{-1}v = s_c$，$s_c$ 属于 G 而且不是单位元素；此外，存在一个包含 c，c' 和一个迷向向量(見 Ia)的 3 維非迷向子空間 V；因为 w 将 V^0 中一切元素都保持不变，所以仍然可以象上面那样証明下去． 于是当 $K \neq \mathbf{F}_3$ 时，定理就完全証明了．

II. $K = \mathbf{F}_3$, $n \geqslant 6$．我們先回忆一下，我們把一个平面 $P \subset E$ 称为椭圓平面，如果它有一組規格化正交基 (e_1, e_2)($f(e_1, e_1) = f(e_2, e_2) = 1$)；$P$ 中另外的两条直綫 e_3K，e_4K 也是正交的而且 $f(e_3, e_3) = f(e_4, e_4) = -1$．任何非迷向向量都至少包含在一个椭圓平面之中．我們把一个正交变换称为椭圓变换，如果它把一个椭圓平面 P 的正交子空間 P^0 中的一切向量都保持不变．首先，我們可以象 § 8，1) 中一样証明 $O_n(\mathbf{F}_3, f)$ 由椭圓变换生成，由此同样可以推出任何两个椭圓平面都可以用 Ω_n 中一个变换将它們中的一个变到另外一个． 于是 $\Omega_n/(\Omega_n \cap Z_n)$ 的单純性的証明可以象 I 中一样进行下去，而只需将双曲旋轉（这时它們的平方永远等于单位元素）用椭圓旋轉来代替并利用当 $\nu = 1$ 时 $\Omega_4/(\Omega_4 \cap \cap Z_4)$ 的单純性(当 $K = \mathbf{F}_3$ 时，羣 Ω_3 不是单羣)． 确切地說，首先利用一切 3 維子空間 V 永远包含迷向向量这件事实；此外，如果 V 包含一个椭圓平面，那么 V 就包在一个 4 維子空間 W 中而 f 在 W 上的限制的指数等于 1． 实际上，如果 V 不是迷向的，而且如果 P 是 V 中一个双曲平面而 a 是 V 中一个与 P 正交的向量，那么只要在 V^0 中取一个向量 b 使得 $f(a, a) = f(b, b)$ 而令 $W = V + bK$ 就行了． 如果 V 是迷向的而且包含一个双曲平面 Q，那么 V 中就有一个与 Q 正交的迷向向量；因为在 Q^0 中 x 包含在一个双曲平面 R 里，那么只要取 $W = Q + R$ 就行了．

然后，我們就象 Ib)中一样化为 G 包含一个不等于单位元素的变换 u，而 u 将一个向量 $a \neq 0$ 保持不变的情形．如果 a 不是迷向的，那么或者有一个包含 a 的椭圓平面 P 使得 $u(P) \neq P$，或者 $u^2 = 1$．在第一种情形，我們就象 Ib)，8)中那样进行，只要将上面的注意应用到 $V = P + u(P)$ 上即可；在第二种情形，設 V 和 W

分別是 u 的正空間和負空間，那么 V 和 W 的維数都 $\geqslant 2$，而我們可以假定 V 的維数 $\geqslant 3$（或者需要用 $-u$ 代替 u）。設 b 是 W 中的一个非迷向向量，c'' 是 W 中与 b 正交的一个非迷向向量；如果 $f(c'', c'') = f(b, b)$，$c = c' + c''$（其中 c' 是 V 中迷向向量）就使得 $f(c, c) = f(b, b)$，因此平面 $P = bK + cK$ 是椭圓，我們有 $u(P) \neq P$ 而且 $u(P) + P$ 是 3 維的，于是我們可以按照习惯的方法完成証明。如果反过来 $f(c'', c'') = -f(b, b)$，我們就取 $c = c' + c''$，其中 $c' \in V$ 使得 $f(c', c') = -f(b, b)$，然后再用同样方法来完成証明。

如果 a 是迷向的，那么 u 对于与 a 正交的超平面 H 的限制就不能是单位元素；于是或者有一个包有 a 的不是全迷向的迷向平面 P 使得 $u(P) \neq P$，或者 $u(P) = P$ 对一切这种平面，但是 u 对于其中之一的限制不是单位。在第一种情形，設 b, c 是 P 中两个不共綫的非迷向向量，我們有 $f(b, b) = f(c, c)$；設 $v = s_b s_c \in \Omega_n$ 是对于与 b 和 c 正交的超平面的对称乘积。变换 $w = v^{-1}uvu^{-1}$ 属于 G 而且 $\neq 1$，如果令 $V = P + u(P)$，那么 w 就将 V^0 中元素都保持不变。因为只在 $n = 5$ 时我們才会有 $V^0 \subset V$，所以至少有一个非迷向向量被 w 保持不变，这又化为前面的情形。

反之，設 $u(P) = P$ 对于一切包含 a 的不是全迷向的迷向平面 P 成立；如果 W 是一个与 aK 在 H 中互补的非迷向子空間，可以假定至少存在一个椭圓平面 $Q \subset V$ 不被 u 保持不变；否則我們容易驗証 u 是一个对合，而这种情形已經研究过了。于是由此假設推出，$Q \cap u(Q)$ 是 1 維的；因为 $Q + u(Q)$ 是 3 維子空間，所以可以象前面一样完成証明。

III. $K = \mathbf{F}_3$, $n=5$. 这时我們利用 $P\Omega_5(\mathbf{F}_3)$ 与单羣 $PSp_4(\mathbf{F}_3)$ 同构这件事实（第四章 § 8）。

此外，上面这个定理的証明同时也証明了 $O_n^+(K, f)$ ($n \geqslant 5$, $\nu \geqslant 1$) 的任何正规子羣，如果不包在 Z_n 中，就包有换位子羣 $\Omega_n(K, f)$。

最后我們指出，当 n 是奇数时（这时 $\mathbf{F}_q$ 上一切 n 个变数的正

交羣都同构)，旋轉羣 $O_n^+(K, f)$ 中元素的个数是

$$(q^{n-1}-1)q^{n-2}(q^{n-3}-1)q^{n-4}\cdots(q^2-1)q,$$

而当 $n=2m$ 是偶数时，$O_n^+(K, f)$ 中元素的个数是

$$(q^{2m-1}-\varepsilon q^{m-1})(q^{2m-2}-1)q^{2m-3}\cdots(q^2-1)q,$$

其中 $\varepsilon=1$ 如果 $(-1)^m\Delta$ 是 $\mathbf{F}_q$ 中的一个平方元素，而 $\varepsilon=-1$ 在相反的情形，Δ 是 f 的判别式(L. E. Dickson[1]，160 頁)．因为当 $n\geqslant 3$ 时 f 的指数永远 $\geqslant 1$，而对于一个有限域，羣 K^*/K^{*2} 是 2 阶的，所以 $\Omega_n(\mathbf{F}_q, f)$ 在 $O_n^+(K, f)$ 中的指数为 2 (§ 8) 而当 n 是偶数时，$\Omega_n\cap Z_n$ 是 2 阶的或 1 阶的依判别式 Δ 是 $\mathbf{F}_q$ 中的平方元素或不是 $\mathbf{F}_q$ 中的平方元素而定.

§ 10. 羣 $O_n(K, Q)$

(K 是特征数等于 2 的域，Q 是无亏数的二次形式)

我們提醒一下，这时 $n=2m$ 应該是偶数而羣 $O_n(K, Q)$ 是对应于与二次形式 Q 相关的双綫性形式 f 的辛羣 $Sp_{2m}(K)$ 的一个子羣(第一章 § 16).

$O_n(K, Q)$ 在 $\Gamma L_n(K)$ 中的中心化子可以用和 § 3 中一样的方法求得(只需要用正交平延代替对称，用奇异向量代替迷向向量). 于是我們就看到，除了下面两种情形之外，它的中心化子就是位似变換羣 H_n，这两种例外情形是：1° $n=2$, $K=\mathbf{F}_4$, $\nu=1$，这时中心化子还包含将具性質 $f(e_1, e_2)=1$ 的两个奇异向量 e_1, e_2 互換的半綫性变換；2° $n=2$, $K=\mathbf{F}_2$, $\nu=1$，这时 $O_2(K, Q)$ 是一个 2 阶羣，它就是它自己的中心化子．除了最后一种情形之外，$O_n(K, Q)$ 的中心仅含单位元素.

我們仍然可以对于无亏数的二次形式 Q 定义它的克黎福特代数 $C(Q)$ (C. Arf[1], C. Chevalley[1])；它是张量代数 $T(E)$ 对于由形状 $x\otimes x-Q(x)$ 的一切元素所生成双边理想 $\mathfrak{a}_1$ (它包含由形状 $x\otimes y+y\otimes x-f(x, y)$ 的一切元素所生成的双边理想)的商代数．代数 $C(Q)$ 仍然是 K 上一个代数，其次数为 2^m；E 可以看作 $C(Q)$ 中次数 1 的元素所組成的子空間，同时对于 E 中任意一

对元素 x, y, 我們有

$$xy + yx = f(x, y). \tag{14}$$

$$x^2 = Q(x). \tag{15}$$

特别, 如果 $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 2m}$ 是 E (对于双綫性形式 f) 的一組辛基使得 $f(e_i, e_j) = f(e_{m+i}, e_{m+j}) = 0$ 及 $f(e_i, e_{m+j}) = \delta_{ij}$ 对 $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant m$, 那么

$$\left.\begin{aligned} &e_i^2 = Q(e_i) \quad e_{m+i}^2 = Q(e_{m+i}), \\ &e_ie_j = e_je_i, \quad e_{m+i}e_{m+j} = e_{m+j}\,e_{m+i}, \\ &e_ie_{m+j} + e_{m+j}e_i = \delta_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

对于 $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant m$. $C(Q)$ 的中心是 K.

对应于含偶数个元素的子集 H 的那些 e_H (象 §7 中一样定义) 的綫性組合 ($C(Q)$ 的偶数次元素) 組成 $C(Q)$ 的一个子代数 $C^+(Q)$, 它在 K 上的維数是 2^{m-1}, 它由乘积 e_ie_j $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2m)$ 和单位元素所生成. $C^+(Q)$ 的中心 T 是 K 上的一个 2 維代数, 它以 1 和

$$\zeta = e_1e_{m+1} + e_2e_{m+2} + \cdots + e_me_{2m} \tag{17}$$

为一組基, 而 ζ 适合方程

$$\zeta^2 + \zeta = \Delta(Q), \tag{18}$$

其中

$$\Delta(Q) = Q(e_1)Q(e_{m+1}) + \cdots + Q(e_m)Q(e_{2m}). \tag{19}$$

我們說 $\Delta(Q)$ 是 Q 对于辛基 $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 2m}$ 的伪判別式 (C. Arf[1], M. Kneser[2]). 設 u 是一个辛变换, 令

$$u(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}e_j + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}e_{m+j},$$

$$u(e_{m+i}) = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}e_j + \sum_{j=1}^{m} d_{ij}e_{m+j}.$$

如果我們令 $Q_1(x) = Q(u(x))$, 而以 $\Delta(Q_1)$ 表 Q_1 对于同一組基 (e_i) 的伪判別式, 那么有

$$\Delta(Q_1) = \Delta(Q) + \mathfrak{p}(D(u)), \tag{20}$$

其中我們令 $\mathfrak{p}(\xi) = \xi + \xi^2$ 而

$$D(u) = \sum_{i,j} (\alpha_i a_{ij} c_{ij} + \beta_j b_{ij} d_{ij} + b_{ij} c_{ij}) \qquad (21)$$

（写 $Q(e_i) = \alpha_i$，$Q(e_{m+i}) = \beta_i$）是 u 的狄克逊（Dickson）不变量（L. E. Dickson[1]，206頁，J. Dieudonné[20]）。对于一个正交变换 u，我們有 $D(u) = 0$ 或 $D(u) = 1$；此外，映射 $u \to D(u)$ 是 $O_n(K, Q)$ 到加法羣 K 中的一个表示，使得 $D(u) = 0$ 的正交变换 u 組成 $O_n(K, Q)$ 的一个指数 2 的子羣，仍然把它称为旋轉羣而把它記作 $O_n^+(K, Q)$。对于一个正交平延 t，永远有 $D(t) = 1$。

1) $O_n(K, Q)$ 的每一个变换都是正交平延的乘积，除非当 $K = \mathbf{F}_2$，$n = 4$ 而 $\nu = 2$ 时（J. Dieudonné[4]；在 C. Chevalley[1]，20—21 頁有另外一个証明）。除了上面举出的例外情形之外，我們还可以証明每个正交变换頂多是 n 个正交平延的乘积（J. Dieudonné[19]）。于是除了例外情形之外，正交旋轉就是偶数个正交平延的乘积的那些正交变换。§6 中关于可用一个旋轉将 E 的一个子空間 V 变到另一个子空間 W 的注意（当 Q 在 V 和 W 上的限制等价时）这时也成立，只要将"全迷向"用"奇异"代替就行了（既使对于上面指出的例外情形也可）。

2) 当 $n \geqslant 4$ 时，$O_n^+(K, f)$ 的中心仅含单位元素，証明可以完全象 §6 中一样进行，只要指出对于任何非迷向平面 P 都存在一个旋轉（它是其向量属于 P 的两个正交平延的乘积）其不变子空間为 P^0。

3) 羣 $O_2^+(K, Q)$ 是交换羣。我們仍然按照 Q 的指数 ν 分成两种情形：a) 如果 $\nu = 1$，在 E 中选取一組由两个奇异向量所組成的基，就可以証明 O_2^+ 中的矩陣就是矩陣 $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$，其中 $\lambda \in K^*$，因此 $O_2^+(K, Q)$ 与 K^* 同构；b) 如果 $\nu = 0$，我們可以在 E 中选取一組辛基使得 $Q(x) = \xi_1^2 + \xi_1\xi_2 + \alpha\xi_2^2$，而多項式 $X^2 + X + \alpha$ 在 K 上不可約。設 $K_1 = K(\omega)$ 是将这个多項式的一个根 ω 添加到 K 上之后所得到的可离二次扩张，将 E 和 K_1 視为同一而将 $(1, 0)$ 看作 K_1 中的单位元素；如果 $\zeta = \xi + \omega\eta$，那么它的共軛元素 $\bar{\zeta} = \xi + \eta + \omega\eta$，因之 $\zeta\bar{\zeta} = \xi^2 + \xi\eta + \alpha\eta^2$。另一方面，我們推

出，将 K_1 的单位元素保持不变的旋轉一定是单位变换；因为每个旋轉 $u \in O_2^+(K, Q)$ 都将 K_1 中的单位元素变到一个范为 1 的元素 γ，所以可以把它看作是变换 $\zeta \to \gamma\zeta$，因此 $O_2^+(K, f)$ 与 K_1 中范数等于 1 的元素所組成的羣同构.

以 $\Omega_n(K, Q)$ 表正交羣 $O_n(K, Q)$ 的换位子羣.

4）换位子羣 $\Omega_n(K,Q)$ 由两个共軛正交平延的乘积 $t(wtw^{-1})$ 所生成，也由 O_n 中平方元素所生成. 証明与 §6, 4) 中的証明完全一样，只是例外情形 $K = \mathbf{F}_2$, $n = 4$, $\nu = 2$ 需要特别討論(J. Dieudonné[4], 45 頁).

从現在开始，在本节中除非另有声明，我們总是将例外情形 $K = \mathbf{F}_2$, $n = 4$, $\nu = 2$ 除外.

5）当 $n \geqslant 4$ 时，羣 Ω_n 也是旋轉羣 O_n^+ 的换位子羣. §6, 5)中所給的証明并不能搬到这里来，但是我們可以直接証明对于任意两个正交平延 s, t, $sts^{-1}t^{-1}$ 都属于 O_n^+ 的换位子羣，从而証明这个命題 (C. Chevalley[1]; 54—55 頁).

当 $n \geqslant 4$ 时，Ω_n 的中心仅含单位元素(因此等于 $\Omega_n \cap Z_n$)，証明与 §6 中对于特征数 $\neq 2$ 的域所給的証明完全相仿. 此地仍然需要另外討論 $K = \mathbf{F}_2$ 的情形，这时需要研究椭圓平面，这就是 $Q(x)$ 在它上面的限制对于一組辛基而言是 $\xi_1^2 + \xi_1\xi_2 + \xi_2^2$ 的平面；然后我們再証明任何非奇异直綫都是两个椭圓平面的交(例外情形 $K = \mathbf{F}_2$, $n = 4$, $\nu = 2$ 已經除外了).

6）对于任何正交变换 $u \in O_n(K, Q)$，都存在一个可逆元素 $s_u \in C(Q)$ 使得 $u(x) = s_u x s_u^{-1}$ 对一切 $x \in E$ 而且 s_u 除了一个純量因子之外是唯一确定的；u 是一个旋轉的充分必要条件是 s_u 是偶数次的. 反之，对于任何可逆元素 $s \in C(Q)$ 使得 $sEs^{-1} = E$ 者，E 的变换 $x \to sxs^{-1}$ 都是羣 $O_n(K, Q)$ 的一个变换.

証明与 §7, 3) 和 §7, 4) 中的完全一样，只要将对称用正交平延代替即可.

对于一个旋轉 $u \in O_n^+$，象 §7 一样定义它的旋子范数 $\theta(u) \in K^*/K^{*2}$；O_n^+ 在这个表示下的象是 K^*/K^{*2} 中由乘积 $Q(x)Q(y)$

所属的陪集所生成的子羣，而它的核 $O'_n(K, Q) = \theta^{-1}(1)$ 包有換位子羣 $\Omega_n(K, Q)$. 我們注意，当 K 是完备域时(特别当 K 是有限域时), $O'_n = O^+_n$.

包含一条奇异直綫的非迷向平面称为双曲平面 (它恰含两条奇异直綫)，将一个双曲平面的正交子空間中的元素都保持不变的正交变换(或旋轉)称为双曲变换(或双曲旋轉).

7) 設 P 是双曲平面，每一个正交变换(或正交旋轉) u 都可以写作 $u = sv$, 其中 s 是平面 P 的一个双曲变换(或旋轉)而 $v \in \Omega_n$. 如果 P' 是另外一个双曲平面，那就存在一个变换 $w \in \Omega_n$ 使得 $w(P) = P'$. 对于正交变换可以象 § 8, 2) 中那样証明这个命題，只要指出正交平延是双曲变换即可；此外，如果 u 是一个旋轉而 $u = sv$, 其中 $v \in \Omega_n$ 而 s 是平面 P 的一个双曲变换，那么 s 必須是双曲旋轉. 这个命題的第二部分可以象 § 8, 3) 中那样証明.

8) 如果 $n \geqslant 2$ 而 $\nu \geqslant 1$ (例外情形 $K = \mathbf{F}_2, n = 4, \nu = 2$ 永远除外)，那么旋子范数是 O^+_n 在羣 K^*/K^{*2} 上的一个表示，而它的核是換位子羣 Ω_n; 因此商羣 O^+_n/Ω_n 与 K^*/K^{*2} 同构.

可以象 § 8 中一样証明这个命題.

当 $n=4$ 时克黎福特代数的构造也帮助我們研究羣 $O_4(K, Q)$. 設 $(e_i)_{1<i<4}$ 是一組辛基使得 $f(e_1, e_3) = f(e_2, e_4) = 1$ 而 $f(e_i, e_j) = 0$ 对其余的指标对，令 $Q(e_1) = \alpha, Q(e_2) = \beta, Q(e_3) = \gamma, Q(e_4) = \delta$. $C^+(f)$ 的中核是 K 和 $K\zeta$ 的直和，其中 $\zeta = e_1e_3 + e_2e_4$ 而 $\zeta^2 + \zeta = \Delta, \Delta = \alpha\gamma + \beta\delta$ 是 Q 的伪判别式；依照 Δ 是否为形状 $\mathfrak{p}(\rho)$ 而 $\rho \in K$, T 就是两个与 K 同构的域的直和或是 K 的一个可离二次扩张. 根据維特定理，当 $\nu = 2$ 时(这时可設 $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$) 永远是第一种情形发生；当 $\nu = 1$ 时 (这时可設 $\beta = \delta = 0$ 而 $\alpha\gamma$ 不是形状 $\mathfrak{p}(\rho)$ 的元素) 永远是第二种情形发生；当 $\nu = 0$ 时第一种和第二种情形都可以发生.

象 §7 中一样定义了 $C(Q)$ 的对合 J 之后，我們仍然有下面的判断法則，它的証明和特征数 $\neq 2$ 的情形的証明(§ 9, 4))一样.

9) $C^+(Q)$ 中的一个可逆元素 s 可表成形状 s_u 而 $u \in O^+_n$ 的

充分必要条件是 $N(t) = tt^J$ 属于 K.

由此推出，羣 $O_4'(K, Q)$ 与 $C^+(Q)$ 中范数 $N(t) = 1$ 的可逆元素 t 組成的羣同构.

分別研究下面几种情形:

I. $\nu = 2$. 这时 $C^+(Q)$ 是两个单代数的直和，它們的中心 $(1+\zeta)K$ 和 ζK 与 K 同构；第一个单代数以 $1+\zeta$, e_1e_2, e_3e_4 和 $j = e_1e_2e_3e_4$ 为基，而第二个单代数以 e_1e_4, e_2e_3, $e_1e_3\zeta = j + e_1e_3$ 和 $e_2e_4\zeta = j + e_2e_4$ 为基. 容易看出，这两个单代数都和 K 上 2 級矩陣所組成的代数同构，如果就把它們看作这个矩陣代数的話，范数 $N(t)$ 就化为行列式. 于是我們得到結論.

10) 如果 $\nu=2$, $K \neq \mathbf{F}_2$, 则羣 $\Omega_4(K, Q)$ 与直乘积 $SL_2(K) \times \times SL_2(K)$ 同构(其中每一个因子都是单羣(§ 2)).

对于上面所除外的例外情形($K = \mathbf{F}_2$, $\nu = 2$), 我們可以証明 O_4^+ 与 $C^+(Q)$ 中范 $N(t) = 1$ 的元素 t 所組成的羣同构，因而与 $SL_2(\mathbf{F}_2) \times SL_2(\mathbf{F}_2)$ 同构，这时直乘积中每一个因子都是 6 阶可解羣. 同时由(偶数个)平延的乘积所生成的羣 Ω_4 (J. Dieudonné[4], 45 頁)是 O_4^+ 的一个指数 2 的子羣，而 O_4^+ 的換位子羣是 Ω_4 的一个指数 2 的子羣，它是一个阿倍尔羣，而且是两个 3 阶循环羣的乘积.

II. $\nu = 1$. 这时 $C^+(Q)$ 的中心 T 是 K 的一个可离二次扩张，可以証明 1, e_1e_2, e_3e_4 及 $j = e_1e_2e_3e_4$ 組成 $C^+(Q)$ 在 T 上的一組基，而且不难驗証 $C^+(Q)$ 与 T 上的 2 級矩陣所組成的代数同构；如果把 $C^+(Q)$ 就看作这个矩陣代数，那么 $N(t)$ 仍然化为行列式. 因此有

11) 如果 $\nu = 1$, 羣 $\Omega_4(K, Q)$ 与羣 $SL_2(T)$ 同构，因而是单羣(T 至少有 4 个元素)(§ 2).

III. $\nu = 0$. 上面已經指出，这种情形又可分为两种情形:

a) $\Delta = \wp(\rho)$ 而 $\rho \in K$, 这时 $C^+(Q)$ 是两个单代数的直和，它們的中心分別是 $(\rho+\zeta)K$ 和 $(1+\rho+\zeta)K$ (当 $\Delta = 0$ 时，我們就取 $\rho = 1$)；第一个单代数以 $\rho+\zeta$, $(\rho+\zeta)e_1e_2$, $(\rho+\zeta)e_3e_4$,

$(\rho+\zeta)e_1e_2e_3e_4$ 为基，它与K上的四元数代数 A_1 同构，而 A_1 的乘法表是

$$i_1^2=\alpha\beta,\quad i_2^2=\gamma\delta,\quad i_2i_1=i_1i_2+\rho.$$

第二个单代数以 $\rho+\zeta+1$, $(\rho+\zeta+1)e_1e_4$, $(\rho+\zeta+1)e_2e_3$, $(\rho+\zeta+1)(e_1e_3+e_1e_2e_3e_4)$ 为基，它与K上的四元数代数 A_2 同构，而 A_2 的乘法表是

$$j_1^2=\alpha\delta,\quad j^2=\beta\gamma,\quad j_2j_1=j_1j_2+\rho.$$

利用 $\nu=0$ 这个假設容易証明，这两个代数都是体. 实际上，在 A_1 中元素 $x_0+x_1i_1+x_2i_2+x_3i_1i_2$ 的范是二次形式

$$x_0^2+\rho x_0x_3+\alpha\beta\gamma\delta x_3^2+\alpha\beta x_1^2+\rho x_1x_2+\gamma\delta x_2^2.$$

可是容易看出，經变数替換

$$z_1=x_0+\alpha\gamma x_3,\quad z_2=\alpha x_1+\delta x_2,\quad z_3=\alpha\rho x_3,\quad z_4=\rho x_4$$

之后，这个二次形式（除了差一个純量因子之外）等价于

$$Q(z)=\alpha z_1^2+z_1z_3+\gamma z_3^2+\beta z_2^2+z_2z_4+\delta z_4^2$$

$\left(\text{其中 } z=\sum_{i=1}^{4} z_ie_i\right)$.

可用同样方法討論 A_2. 因此，如果以 N_1（及 N_2）分别表 A_1（及 A_2）中范数等于 1 的元素所組成的羣，那么 $\Omega_4(K, Q)$ 就与直乘积 $N_1\times N_2$ 同构.

b) Δ 不是形状 $\mathfrak{p}(\rho)$ 的元素. 这时T是K的一个可离二次扩张而 $C^+(Q)$ 是T上的四元数代数，它以 1, e_1e_2, e_3e_4, $e_1e_2e_3e_4$ 为基，而它的乘法表和 A_1 的乘法表一样，只是 ρ 需要用 $1+\zeta$ 代替. 这个代数里的范数仍然可以看作是T上的一个二次形式，而这个二次形式（除了差一个純量因子之外）与 $Q(z)$ 等价. 这时仍由假設 $\nu=0$ 推出 $Q(z)$ 在T上的指数是 0. 实际上，如果有一个向量 $x+\zeta y$ 使得 $Q(x+\zeta y)=0$，就可以推出两个向量 x, y 使得 $Q(x)=\Delta Q(y)$ 及 $Q(y)=f(x, y)$，由此再利用伪判别式 Δ 的表达式即推出与平面 $xK+yK$ 正交的平面中存在一个 $\neq 0$ 的奇异向量. 因此，$C^+(Q)$ 是T上的四元数体，而羣 $\Omega_4(K, Q)$ 与这个体中范数等于 1 的元素所組成的羣同构.

当$n\geqslant 6$时,有下面的定理(L. E. Dickson[1], J. Dieudonné[4]):

12) 如果 $n\geqslant 6$ 而 $\nu\geqslant 1$, 則羣 $\Omega_n(K, Q)$ (Q 无亏数) 是单羣.

这个定理的証明可以象 §9 中相应的定理的証明一样进行. 但是我們不能避免利用这个定理的一些特殊情形, 即不仅要利用在上面 11) 中所証明的 $n=4$, $\nu=1$ 这种情形, 而且还要利用 $n=6$, $\nu=3$ 和 $n=6$, $\nu=2$ 这两种情形, 而这两个情形需要用到这些羣和已經証明了是单羣的 (綫性或酉) 羣之間的同构 (見第四章 §8). 这是由于有 $n=4$, $\nu=2$ 这个例外情形和我們不能限制到 E 的 3 維子空間去这件事实所引起的. $K=\mathbf{F}_2$ 的情形需要另外討論.

此外, 这个定理的証明也証明了 $O_n^+(K, Q)$ ($n\geqslant 6$, $\nu\geqslant 1$) 的任何正規子羣都包含换位子羣 $\Omega_n(K, Q)$.

最后我們指出, 旋轉羣 $O_{2m}^+(F_q, Q)=\Omega_{2m}(F_q, Q)$, 其中 $q=2^h$ 中元素的个数是

$$(q^m-1)(q^{2(m-1)}-1)q^{2(m-1)}\cdots(q^2-1)q^2,$$

如果 $\nu=m$; 是

$$(q^m+1)(q^{2(m-1)}-1)q^{2(m-1)}\cdots(q^2-1)q^2,$$

如果 $\nu=m-1$ (L. E. Dickson[1], 206 頁).

§11. 羣 $O_n(K, Q)$

(K 的特征数等于 2, Q 是有亏数的二次形式)

我們提醒一下, Q 的亏数 d 一定使得 $n-d=2p$ 是偶数, 而且我們永远可以把 $O_n(K, Q)$ 看作辛羣 $Sp_{2p}(K)$ 中那些辛变换 u 使得 $Q(u(x))+Q(x)\in M$ 者所組成的子羣, 而 M 是将 K 看作是 K^2 上的向量空間时的一个子空間, 同时我們总可以假定 M 包含单位元素; 唯一需要研究的情形是 $M\neq K$ 的情形, 这时 K 是非完备域(因而是无限域). 此外, Q 在前面考虑过的功維空間 E_1 上的限制 Q_1 是非退化的, 因而如果 $\nu\geqslant 1$, 則 E_1 中存在 $\neq 0$ 的奇异向量. 因为 $O_{2p}(K, Q_1)$ 是 $O_n(K, Q)$ 的子羣, 所以 $O_n(K, Q)$ 的中

心仅含单位元素(§10).

E_1 中的一个向量 a 称为半奇异向量，如果 $Q(a)\in M$; $O_n(K, Q)$ 中每一个变换都将半奇异向量变到半奇异向量. 向量 a 为半奇异的正交平延(第一章 §16)称为半奇异正交平延;这样一个平延 $x\to x+\lambda f(x, a)a$ 由条件 $\lambda\in M$ 所刻划($\lambda=1$ 总满足这个条件).

1) 任何正交变换都是正交平延之积. 証明方法与无亏数形式的情形是一样的，K 是无限域这个假設取消了所有的例外情形(J. Dieudonné[4], 55 頁).

2) 当 $2p\geqslant 2$ 而 $\nu\geqslant 1$ 时，由半奇异正交平延所生成的羣 $\Omega_n(K, Q)$ 是单羣. 証明的方法与証明羣 $SL_n(K)$ 及由酉平延所生成的羣 $T_n(K, f)$ 的单純性的方法相仿(J. Dieudonné[4], 55—58 頁).

3) 羣 $\Omega_n(K, Q)$ (当 $2p\geqslant 2$, $\nu\geqslant 1$ 时)是 $O_n(K, Q)$ 的换位子羣. J. Dieudonné[4], 59—60 頁中所給的証明对于情形 $2p=4$, $\nu=2$ 不能应用. 为了研究这种情形,我們需要証明(見上面所引的书)，如果 P, P' 是 E_1 里的两个双曲平面，Ω_n 中就一定存在一个将 P 变到 P' 的变换. 但是,利用 $\nu=2$ 这个假設,只要将狄多涅(J. Dieudonné)[13]的,380—382 頁中对于酉羣的方法略为改动一下,就能証明这一点.这个改动如下:給了 E_1 中一組辛基 $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$, 它們由奇异向量組成而且 $f(e_1, e_2)=f(e_3, e_4)=1$, $f(e_i, e_j)=0$ 对于其余的指标对 $(i<j)$, 我們就能証明，将平面 e_1K+e_3K 和 e_2K+e_4K (整体地)保持不变的三个(而不是两个)正交平延(它們的向量是 $a_k=\lambda_k e_2+\mu_k e_3$) 之积 u 使得 $u(e_1)=e_1+e_3\alpha$, 而 $\alpha\neq 0$; 要証明这一点，只要証明能够在 K 中选取六个元素 λ_k, $\mu_k(1\leqslant k\leqslant 3)$ 使得 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$, $\mu_1+\mu_2+\mu_3=0$, $\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3\neq 0$ 即可.

§12. 对应于絕对非迷向形式的正交羣和酉羣

在 §4 到 §11 中关于正交羣和酉羣的构造所証明的大部分結

果，当所研究的半双綫性形式或二次形式是絕对非迷向形式时，并不成立.

例如，研究有理 p-adic 域 $\mathbf{Q}_p$，而設 f 是 $\mathbf{Q}_p$ 上指数 0 的 $n=3$ 或 $n=4$ 个变数的非退化对称双綫性形式. 我們可以求得 E 的一組正交基，使得 $O_n(\mathbf{Q}_p, f)$ 中每一个变换对于这組基的矩陣中的元素都是 p-adic 整数(M. Eichler[2], 57 頁). 設 G_k 是 O_n 中变换 u 所組成的集合，而 u 的矩陣的形状是 $I+p^kV$，其中 V 是以 p-adic 整数为系数的矩陣. 上面的注意指出 G_k 是 O_n 的一个正規子羣，而我們容易証明，G_k/G_{k+1} 是不仅包含单位元素的阿倍尔 p 羣，而 G_k 的交是 O_n 的单位元素(J. Dieudonné[11]). 与 §9 的結果相比較就看出这个情形在某种程度上恰好与指数 $\nu \geqslant 1$ 的情形相反.

对于任意个变数的正交羣 $O_n(K, f)$，以及特征数 $=2$ 的域上的正交羣 $O_n(K, Q)$ 和酉羣 $U_n(K, f)$，我們都能举出类似的例子(J. Dieudonné[4]). 此外，§8 中关于羣 O_n^+/Ω_n 和 $\Omega_n \cap Z_n$ 的結果对于絕对非迷向形式也不成立. 例如，設 $K=\mathbf{R}$(实数域)而 f 为定正的，我們就有 $\Omega_n = O_n^+$，可是羣 $\mathbf{R}^*/\mathbf{R}^{*2}$ 是 2 阶羣；我們还可以举出有理数域 $\mathbf{Q}$ 上 4 个变数的一个絕对非迷向对称双綫性形式 f，它的判别式是一个平方元素，可是对于它而言，对称 $x \to -x$ 不属于 Ω_n (J. Dieudonné[9], 93頁). 我們还可以在域 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 上举出一个 2 个变数的酉羣 $U_n(K, f)$，使得 U_n^+ 不等于它的换位子羣，这个例子可与 §5 中的結果相比較(J. Dieudonné[10], 948頁).

上面的例子都是在特殊的域 K 上造的，于是，对于一个絕对非迷向形式 f 的正交羣 $O_n(K, f)$ (例如) 的构造基本上依賴于基域 K. 我們知道当 $n \geqslant 3$ 而 $n \neq 4$ 时，对于一个絕对非迷向形式的旋轉羣 $O_n^+(\mathbf{R}, f)$ 是单羣，可是在上面我們看到 p-adic 域上 3 个变数的正交羣的构造完全不是这样的.

从这个較深入的观点来看，到目前为止所研究的域是(特征数 $\neq 2$ 的)局部紧致賦值域和代数数域. 关于第一类域，上面对于 p-adic 域所描述的情况可以一般化 (J. Dieudonné[11], M. Eichler [2], 57 頁)；对于 p-adic 域和 p-adic 域只有 $n=3$ 和 $n=4$ 这两

种情形出現，因为当 $n \geqslant 5$ 时，这类域上的对称双綫性形式的指数一定 $\geqslant 1$ (E. Witt[1], 40 頁).

代数数域K上正交羣的研究紧紧依賴于这种域上二次形式的等价理論(第一章 § 8). 我們不拟談及这个理論的細节，只指出这个理論的原則在于研究将域K扩张到它的一个局部域 $K_\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}$ 是K的一个有限位置或无限位置)之后从形式 f 所得到的二次形式；主要結果可以压縮成用"从局部到整体"这个原則表达出来. 例如，f 的指数 $\nu \geqslant 1$ 的充分必要条件是它对于每个域 $K_\mathfrak{p}$ 的指数都$\geqslant 1$. 于是就猜想对于正交羣是否有一个类似的原則. 这个猜想在克耐塞 (M. Kneser)[2] 的工作中部分地得到証实，他的基本結果(改进了从前狄多涅 (J. Dieudonné)[9,10,12] 用較初等的方法得到的結果)是：当 $n \geqslant 5$ 时，代数数域K上正交羣 $O_n(K, f)$ 的构造与 f 的指数 ν 无关. 确切地說，当 $n \geqslant 5$ 而 $\nu = 0$ 时，羣 Ω_n 是旋量范数的核 O'_n，羣 O_n^+/Ω_n 与 K^*/K^{*2} 同构，而且羣 $\Omega_n/(\Omega_n \cap Z_n)$ 是单羣.

还需要弄清当 $\nu = 0$ 时，代数数域K上正交羣 $O_3(K, f)$ 的构造(根据 § 9 的結果，$O_4(K,f)$的构造化为它的构造問題). 我們只能举出当K是有理数域 $\mathbf{Q}$，或一般地說，当K是只有一个实的无限位置的域时的結果. 这时，利用 p-adic 域上 3 个变数的正交羣的构造可以証明，当 $\nu = 0$ 时，羣 $O_3(K, f)$ 有一个正規子羣 G_k 的降鏈，而 G_k/G_{k+1} 是阿倍尔羣同时 G_k 的交只含单位元素 (J. Dieudonné[11]).

我們指出，克耐塞(M. Kneser)[1] 对于代数数域上的酉羣也得到类似的結果.

§ 13. 类似变換羣 $GU_n(K, f)$

我們局限于K是域的情形. 設 Δ 和 r 分别是一个类似变換 $u \in GU_n(K, f)$的行列式和乘子，那么从第一章 § 9 的关系式(23)就得到

$$\Delta\Delta^J = r^n.$$

如果 $n = 2m + 1$ 是奇数，令 $\Delta = r^m\mu$，从上面的方程就得到

$r = \mu\mu^J$，由此推出 $h_\mu^{-1}u \in U_n(K, f)$，而 h_μ 是位似变换 $x \to x\mu$；这时 $GU_n(K, f)$ 是位似变换羣 Z_n 和酉羣 $U_n(K, f)$ 的乘积（一般說来，不是直乘积）. 对于特征数 $\neq 2$ 的域 K 上的正交羣，当 n 是奇数时，羣 $GO_n(K, f)$ 是 Z_n 和旋轉羣 $O_n^+(K, f)$ 的直乘积（§6, 2)).

如果 $n = 2m$ 是偶数，我們可以写 $\Delta = \mu r^m$，其中 $\mu\mu^J = 1$；使得 $\Delta = r^m$ 的类似变换組成 $GU_n(K, f)$ 的一个正規子羣 $GU_n^+(K, f)$，它里面的元素称为直接类似变换；当 $J \neq 1$ 时，因为 $U_n(K,f)$ 中存在行列式等于范数为 1 的任意元素的变换，所以商羣 GU_n/GU_n^+ 与 K 中范数为 1 的元素所組成的羣同构.

根据上述，GU_n 中类似变换的乘子羣 $M(f)$ 与 GU_n^+ 中类似变换的乘子羣相同. 此外，設 f_0 是 f 的既約絕对非迷向形式（它含 $2(m-v)$ 个变数，参考第一章 § 11），我們就有 $M(f) = M(f_0)$. 特别，对于辛羣，有 $M(f) = K^*$；一般說来，当 $v = m$ 时 $M(f) = K^*$ 也成立. 当 $n = 2m$ 是偶数而 f 是絕对非迷向形式时，羣 $M(f)$ 的构造一般說来并不知道. 我們只能証明（J. Dieudonné[21]）$M(f)$ 是 K_0（J 的不变域）中形状 $aa^J + (-1)^{m-1}\Delta bb^J$ 的元素所組成的羣 $N(\Delta)$ 的子羣，而一般有 $M(f) \neq N(\Delta)$. 然而，如果 K 是代数数域，我們可以把 $N(\Delta)$ 的子羣 $M(f)$ 完全刻划出来（見上面引的文献），无論对于酉羣（$J \neq 1$）和正交羣都是这样.

关于正交类似变换羣 $GO_n(K, f)$（特征数 $\neq 2$ 的域 K 上的），仍然可以用克黎福特代数来研究类似变换（M. Eichler[1,2]）. 对于具乘子 r_n 的类似变换 u 以及 E 中偶数个向量的乘积 $x_1x_2\cdots x_{2k}$（E 已嵌入 $C(f)$），令 $\tilde{u}(x_1\cdots x_{2k}) = r_u^{-k}u(x_1)\cdots u(x_{2h})$. 我們可以証明这个定义与将这个元素分解成 E 中向量的乘积的方式无关，还可以証明定义在 $C^+(f)$ 中的映射 $\tilde{u}$ 是这个环的一个自同构. 当 $n = 2m$ 时，u 是一个直接类似变换的充分必要条件为 $\tilde{u}$ 将 $C^+(f)$ 的中核 T 中的元素保持不变；这时 $\tilde{u}$ 是一个内自同构 $z \to s_uzs_u^{-1}$，其中 s_u 是 $C^+(f)$ 中的一个元素，除了一个属于 T 的因子之外是唯一确定的. 此外，$s_us_u^J$ 属于 T，而当 m 是奇数时，更属于 K.

第三章　典型羣的几何刻划方法

§1. 射影几何的基本定理

設E和E'分别是两个体K和K上的同一維数n的两个右向量空間.如果K和K'是同构的,那么从E到E'上的一个一一半綫性映射就誘导出从射影空間$P(E)$到射影空間$P(E')$上的一个一一映射$\bar{u}$,而$\bar{u}$将每一个射影綫性流形都映到同一維数的一个射影綫性流形."射影几何的基本定理"就是这个性質的逆.确切地說,就是:

1) 設φ是从$P(E)$到$P(E')$上的一个一一映射使得$P(E)$中在一条直綫上的三点被φ映到$P(E')$中在一条直綫上的三点,那么,如果$n \geqslant 3$,K就和K'同构而$\varphi = \bar{u}$,其中u是从E到E'上的一个一一半綫性映射.

首先指出,从假設可以推出,对于維数$p \leqslant n-1$的任意射影綫性流形V,$\varphi(V)$仍是p維的射影綫性流形.实际上,如果a_iK $(1 \leqslant i \leqslant p+1)$是$P(E)$中生成$V$的射影无关的点,那么显然$\varphi(V)$包含在由$\varphi(a_iK)$这$p+1$个点所生成的射影綫性流形$V'$之中,而且这些点是射影无关的;否則将$(a_i)_{1\leqslant i\leqslant p+1}$补成$E$的一組基$(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$之后,$P(E')$中$\varphi(a_iK)$这$n$个点就会生成一个維数$\leqslant n-1$的射影綫性流形,这与假設$\varphi(P(E)) = P(E')$相抵触.因此,如果$\varphi(V)$不等于$V'$,那么$V'$中就有一点,它是不属于$V$的一个点$aK$在$\varphi$之下的象;由$V$和$aK$所生成的$p+1$維流形$V_1$在$\varphi$之下的象就包在$V'$之中,而$V'$是$p$維的,这又和刚刚証明的事实相抵触.

現在研究E的一組基$(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$,$P(E)$的三个点$e_1K$,$e_2K$和$e_nK$以及它們在$P(E')$中的象$e_1'K' = \varphi(e_1K)$,$e_2'K' = \varphi(e_2K)$,

$e'_nK' = \varphi(e_nK)$；首先，e'_1, e'_2, e'_3 在 E' 中綫性无关．以 D 表由 e_1K 和 e_2K 所生成的射影直綫，以 $D' = \varphi(D)$ 表它的象，以 F 表 D 和 e_nK 所生成的射影平面，以 $F' = \varphi(F)$ 表它的象．F 中不属于 D 的每一个点都可唯一地表作 $(e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2 + e_n)K$，于是就可以将 D 在 F 中的补集与向量空間 $L = e_1K + e_2K$ 視为同一；F 中异于 D 的射影直綫就对应于 L 中的一条直綫，而 F 中两条交于 D 中的直綫就对应于 L 中两条平行直綫（即可用一个平移将其中一条变到另外一条）．类似地可以将 D' 在 F' 中的补集与向量空間 $L' = e'_1K + e'_2K$ 視为同一，这样由 φ 就得到一个从 L 到 L' 上的一一映射 g，它将直綫变到直綫而将两条平行直綫变到两条平行直綫，同时还具性質：$g(0) = 0$，$g(e_1) = e'_1$，$g(e_2) = e'_2$[1]．

这样，下面的两个图就指出，給了 K 中两个元素 α, β，借助于在 L 中画平行綫，我們就可以将元素 $\alpha + \beta$ 和 $\alpha\beta$ 作为 e_1K 上的点的横坐标而得到（图 1 和图 2）．

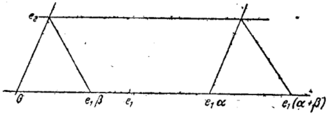


图 1

于是我們可以写 $g(e_1\xi) = e'_1\xi^\sigma$，而 $\xi \to \xi^\sigma$ 是从 K 到 K' 上的一个一一映射具性質 $(\xi + \eta)^\sigma = \xi^\sigma + \eta^\sigma$ 及 $(\xi\eta)^\sigma = \xi^\sigma\eta^\sigma$，換言之，是从 K 到 K' 上的一个同构．此外，因为 L 中連接 $e_1\xi$ 和 $e_2\xi$ 的直綫与連接 e_1 和 e_2 的直綫平行，所以 $g(e_2\xi) = e'_2\xi^\sigma$；最后，$L$ 中的点 $e_1\alpha + e_2\beta$ 可以通过 $e_1\alpha$ 和 $e_2\beta$ 分别作与 e_2 和 e_1 平行的直綫

---

1) 如果任意选取 e'_i，这件事实并不一定成立．但是，一旦选取了 e'_n，我們便可在 $\varphi(e_iK)$ 中选取 e'_i 使得 $\varphi((e_i + e_n)K) = (e'_i + e'_n)K$ 而且适合这个条件的 e'_i 是唯一确定的 $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$．更进一步，我們还可以証明 $\varphi((e_i + e_j)K) = (e'_i + e'_j)K$ 对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$——譯者注．

得到，因此 $g(e_1\alpha + e_2\beta) = e_1'\alpha^\sigma + e_2'\beta^\sigma$，于是 g 是一个（对于同构 σ 的）从 L 到 L' 上的半綫性映射.

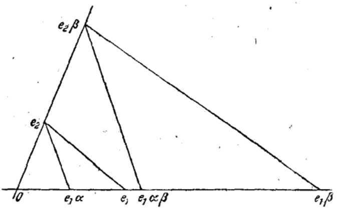


图 2

对于 $P(E)$ 中任何一对点 (e_iK, e_jK) 也可以作相同的討論. 如果 u 是由 $u(e_i) = e_i'(1 \leqslant i \leqslant n)$ 所定义的一个对于 σ 的从 E 到 E' 上的半綫性映射，而 $\bar{u}$ 是对应于它的从 $P(E)$ 到 $P(E')$ 上的映射，那么 $\bar{u}^{-1}\varphi$ 就是从 $P(E)$ 到它自身之上的一个映射而将直綫变到直綫并且将連接任意两点 e_iK, e_jK 的直綫上的点保持不变；由此对 k 施行归納法卽可推出，这个变換将任意 $p+1$ 个点 e_iK 所决定的 p 維綫性流形上的点保持不变；当 $p = n-1$ 时，就得到 $\varphi = \bar{u}$.

基本定理也可如下叙述：

2) **設 φ 是从 $P(E)$ 到 $P(E')$ 上的一个一一映射使得每一个 p 維（p 是 1 到 $n-1$ 之間的一个固定整数）射影綫性流形在 φ 之下的象都包含在一个 p 維射影綫性流形里，那么，如果 $n \geqslant 3$，1) 中的結論仍然成立.**

$p = 1$ 这个情形在 1) 中已經討論过了. 現在設 $p \geqslant 2$，我們用归納法来証明这个命題. 只要証明一个 $p-1$ 維綫性流形 V 在 φ 之下的象包含在一个 $p-1$ 維綫性流形里就行了.

注意，V 是包含它的一切 p 維流形的交，而这些流形在 φ 之下

的象不可能都包含在同一个 p 維流形里，否則我們就要有 $\varphi(P(E)) \neq P(E')$；如果 W_1 和 W_2 是 p 維流形使得 $V = W_1 \cap W_2$，而且 $\varphi(W_1) \subset W_1'$，$\varphi(W_2) \subset W_2'$，其中 W_1' 和 W_2' 是两个不同的 p 維綫性流形，那么 $\varphi(V) \subset W_1' \cap W_2'$，由此卽可推出我們的断言。

当 $E = E'$ 时，前面的这些定理几何地刻画了 E 的直射变换，卽羣 $P\Gamma L_n(K)$ 中的元素。当 $n = 2$ 时，这些定理显然都不成立。我們可以用下面的性質来刻划直射变换(或对射变换)，卽将等于 K 中一个既不为 0 又不为 1，但被相应的自同构 (或反自同构) 不变的一个中心元素的交比保持不变这个性質 (G. Ancochea[1]，华罗庚[7]，R. Baer[3]，78—93 頁)。

当 $n \geqslant 3$ 时，将 E' 取作 E 的对偶，那么基本定理也刻划了对射变换。

§2. 保持"粘切"的变换

I. 格拉斯曼(Grassmann)空間中的变换

仍采用 §1 的符号。設 $G_r(E)$ 是 $P(E)$ 的 r 維射影綫性流形所組成的集合 $(0 \leqslant r \leqslant n-1)$，我們有 $G_0(E) = P(E)$；当 $r > 0$ 时，我們說 $G_r(E)$ 是 E 的指数 r 的格拉斯曼空間。从 E 到 E' 上的一个一一半綫性变换(如果它存在，也就是如果 K 和 K' 同构)定义了从 $G_r(E')$ 到 $G_r(E)$ 上的一个一一变换 $\bar{u}_r$($\bar{u}_0$ 是 §1 中記作 $\bar{u}$ 的变换)。此外，当 $2r = n - 2$ 时，可按以下方法定义另外一个从 $G_r(E)$ 到 $G_r(E^*)$(E^* 是 E 的对偶空間)上的一一映射。$P(E)$ 中每一个維数 $r = (n-2)/2$ 的射影綫性流形 V 都可以写作 $V = P(W)$，而 W 是 E 的一个 $r + 1 = n/2$ 維的向量子空間；訨 W 对应于 E^* 中在 W 上零化的綫性形式所組成的"正交"向量子空間 W' (将 W' 看作 K 上的左向量空間，或 K^0 上的右向量空間)，W' 也是 $n/2$ 維的，我們令 $\omega_r(V) = P(W')$，則 $P(W')$ 是 $P(E^*)$ 中的 r 維射影綫性流形。

我們要象射影几何的基本定理刻划 $\bar{u}_0$ 一样来"几何地"刻划

变换 $\bar{u}_r$ 和 ω_r，而 $r \neq 0$. 为此引进 $G_r(E)$ 中两个流形 V_1, V_2 的算术距离这个概念. 如果 $V_1 \cap V_2$ 的維数是 $r - t$，那么 V_1 和 V_2 的算术距离就是 t; 这也等于說包含 V_1 和 V_2 的最小綫性流形的維数是 $r + t$. 两个 r 維綫性流形 V_1, V_2 称为相粘切，如果它們的算术距离是 1. $G_r(E)$ 中两个綫性流形 V_1, V_2 的算术距离也可以定义为最小的正整数 t 具性质: $G_r(E)$ 中有 $t + 1$ 个綫性流形的有限叙列 (U_i) 存在使得 $U_1 = V_1$, $U_{t+1} = V_2$ 而 U_i 和 U_{i+1} 相粘切对于 $1 \leqslant i \leqslant t$.

最后的注意指出，如果 φ 是从 $G_r(E)$ 到 $G_r(E')$ 上的一个一一映射，那么 φ 和 φ^{-1} 将任意两个相粘切流形变到相粘切流形与 φ 将任意两个流形变到具相同算术距离的两个流形是等价的. 下面的定理給出所要求的刻划方法(周煒良[1]):

当 $n \geqslant 3$ 而 $0 < r < n - 2$ 时，从 $G_r(E)$ 到 $G_r(E')$ 上的任意一个将两个流形变到具相同算术距离的两个流形的一一变换一定是形状 $\bar{u}_r$ 的变换，如果 $2r \neq n - 2$，其中 u 是从 E 到 E' 上的一个一一半綫性映射; 如果 $2r = n - 2$, φ 一定是形状 $\bar{u}_r$ 的变换或形状 $\bar{v}_r \circ \omega_r$ 的变换，其中 v 是从 E^* 到 E' 上的一个一一半綫性映射.

我們只扼要叙述証明的主要綫索:

a) 我們研究 $G_r(E)$ 中两两相粘切的 r 維綫性流形的极大集，并且証明这样一个集合或者由包含同一个 $r-1$ 維綫性流形的全体 r 維綫性流形所組成 (第一类集合)，或者由包含在同一个 $r + 1$ 維綫性流形中的全体 r 維綫性流形所組成(第二类集合).

b) 第一类极大集在 φ 之下的象是 $G_r(E')$ 中的一个极大集，它可以是第一类的，也可以是第二类的. 可是如果对于一个第一类极大集 $\mathfrak{M}$, $\varphi(\mathfrak{M})$ 是第一类的，那么 $G_r(E)$ 中任何另外一个第一类极大集 $\mathfrak{M}_1$ 在 φ 之下的象仍是一个第一类极大集. 为了証明这一点，我們只需要研究 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}_1$ 对应于两个相粘切的 $r-1$ 維綫性流形的情形; 这时 $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}_1$ 只含一个元素，可是如果一个第一类极大集和一个第二类极大集的交是非空的，那么它們的交至少含两个元素.

c) 刻划了 a) 中所定义的极大集之后，从 b) 就可以推出有一

个从集合 $G_{r-1}(E)$ 到 $G_{r-1}(E')$ 或 $G_{r+1}(E')$ 上的一一映射 φ_1 存在；此外，两个 $r-1$ 維(或 $r+1$ 維)綫性流形相粘切就等于它們相应的极大集有一个公共元素；由此推出 φ_1 和 φ_1^{-1} 将两个相粘切的流形变到两个相粘切的流形.

d) 如果 $2r \neq n-2$，由此就推出 φ_1 将 $G_{r-1}(E)$ 变到 $G_{r-1}(E')$. 实际上，如果 $2r < n-2$，两个 $r-1$ 維綫性流形的算术距离頂多是 r，可是两个 $r+1$ 維綫性流形的算术距离可以等于 $r+1$；同样，如果 $2r > n-2$，两个 $r+1$ 維綫性流形的算术距离頂多是 $n-r-1$，可是存在两个 $r-1$ 維綫性流形其算术距离至少等于 $n-r$. 如此遞推下去，我們就定义了从 $P(E)$ 到 $P(E')$ 上的一个一一映射 ψ 使得 $\psi(V)=\varphi(V)$ 对 $P(E)$ 中一切 r 維綫性流形；利用 §1 中結果 2) 即可推出結論.

e) 如果 $2r=n-2$，而 φ 将一切第一类极大集都映到第二类极大集，那么 $\varphi\circ\omega_r^{-1}$ 就将 $P(E^*)$ 中一切第一类极大集都映到 $P(E')$ 中第一类极大集，再利用前面的結果即可以完成証明.

§3. 保持"粘切"的变换

II. 迷向流形空間中的变换

現在設 E 上給了一个非退化的，厄米特或反厄米特的半双綫性形式 $f(x, y)$；如果 K 的特征数 $=2$，我們更假定 f 是一个跡形式(第一章 § 10). 此外，假設 f 的指数 $r+1$ 至少等于 1，我們說 $P(E)$ 中的一个綫性流形 V 是**迷向的**(或**全迷向的**)，如果它可表成形状 $P(W)$，其中 W 是 E (对于形式 f 的) 的一个迷向(或全迷向)子空間；我們以 $N_s(E)$ (或 N_s) 表 $P(E)$ 中 s 維全迷向流形的集合. 一个半类似变换 $u \in \Gamma U_n(K, f)$ 显然定义了一个从 N_r 到它自身之上的一一变换 $\bar{u}_r$，現在仍然要几何地刻划这些变换，我們由下面的定理給出. 这个定理类似于 § 2 中的定理 (周煒良[1], J. Dieudonné[8]).

当 $2 \leqslant r \leqslant \left[\frac{n-2}{2}\right]$ **时**(**因此** $n \geqslant 6$)，**从** $N_r(E)$ **到它自身之**

上的一一变换 φ，如具有性質 φ 和 φ^{-1} 将任意两个相粘切的流形都变到两个相粘切的流形，则必为形状 $\bar{u}_r$，其中 u 是一个半类似变换.

首先我們利用全迷向子空間的性質（第一章 §11）来証明下面两个引理：

a）設 V_1, V_2 是两个同一維数 $s \leqslant r$ 的全迷向流形，那么存在两个最大維数 r 的全迷向流形 W_1, W_2 使得 $V_1 \subset W_1$, $V_2 \subset W_2$ 而 $W_1 \cap W_2 = V_1 \cap V_2$.

b）設 V_1, V_2 是两个同一維数 $s \leqslant r$ 的全迷向流形并設它們的交的維数是 $s-t$，那么存在一个 s 維全迷向流形的有限敍列 $(W_k)_{1<k<t-1}$ 使得 $W_1 = V_1, W_{t+1} = V_2$ 而且 W_k 和 W_{k+1} 相粘切对 $1 \leqslant k \leqslant t$.

象在 §2 中一样，我們仍然研究两两相粘切的 r 維全迷向流形的极大集. 可以陆續証明下列諸性質：

c）任何极大集都由包含同一个 $r-1$ 維的全迷向流形的一切 r 維全迷向流形所組成.

d）因为极大集在 φ（或 φ^{-1}）之下的象仍为极大集，因而依 c）可以定义一个从 $r-1$ 維全迷向流形的集合 $N_{r-1}(E)$ 到它自身之上的一一映射 φ_1. 此外，（利用 a)）可以証明 φ_1 和 φ_1^{-1} 将两个相粘切的流形映到两个相粘切的流形，而且包含在同一个 r 維全迷向流形 V 之中的 $r-1$ 維全迷向流形在 φ_1 之下的象是包含在 $\varphi(V)$ 中的 $r-1$ 維全迷向流形.

e）对于維数 s 递推下去，我們就能定义一个从 $N_s(E)$ 到它自身之上的一一映射 φ_{r-s} 使得这个映射和它的反映射都将两个相粘切的流形变到相粘切的流形. 当 $s=0$ 时，我們就得到一个从 $P(E)$ 的迷向点的集合 $N_0(E)$ 到它自身之上的一一映射 $g = \varphi_r$. 这个映射具有性質：如果 $V = P(W)$ 是一个維数 $s \leqslant r$ 的全迷向流形，那么 V 中的点在 g 之下的象的集合 $g(V)$ 就是 $\varphi_{r-s}(V)$. 于是 $r \geqslant 2$ 这个假設就使我們可以应用射影几何的基本定理（§1），因此如果对于任何 r 維全迷向流形 $V = P(W)$，令 $\varphi_0(V) =$

$P(W')$，那么 g 对于 V 的限制就是形状 $\bar{u}_W$ 的映射，其中 u_W 是从 W 到 W' 上的一个一一半綫性映射. 此外，对于 $N_r(E)$ 的一切流形 V，对应于映射 u_W 的 K 的自同构除了可能差一个内自同构之外是同一个自同构，因此对于一切 $V \in N_r(E)$ 都可以选取同一个自同构. 这只要先对两个相粘切的流形 V_1, V_2 来証明，然后再应用 b) 即可.

当 n 是偶数而 f 是交錯形式时，我們有 $N_0(E) = P(E)$，那么 g 是从 $P(E)$ 到它自身之上的一个映射，而具有性质：将两个（对于 f）正交的点映到两个正交的点；因为 $P(E)$ 的任何一个超平面都由与它的一个点正交的一切点所組成，所以 g 将每一个超平面映到超平面，因之射影几何的基本定理指出 $g = \bar{u}$，其中 u 是一个从 E 到它自身之上的半綫性映射. 在 E 中选取一組辛基，再把 u 将两个正交向量映到两个正交向量的条件写出，就容易推出 u 是一个半类似变换.

f) 在一般情形，我們研究 $N_r(E)$ 的两个沒有公共点的流形 V_1, V_2，并設 U_0 是由它們所生成的 $2r+1$ 維射影綫性流形. 我們首先証明，如果 $U_0 = P(W_0)$，那么存在一个从 W_0 到 E 的 $2r+2$ 維子空間上的一一半綫性映射 v_0，使得对于任何迷向点 $x \in U_0$，我們有 $\bar{v}_0(x) = g(x)$（周煒良[1]，47 頁）. 在 $P(E)$ 中造一个递增的射影綫性流形叙列 $U_0, U_1, \cdots, U_{n-2r-2}$ 使得 U_{k+1} 是从 U_k 添上一个不与 U_k 正交的迷向点而得. 于是我們可以証明，如果 $U_k = P(W_k)$，那么可以用归納法定义一个一一半綫性映射的叙列 $v_0, v_1, \cdots, v_{n-2r-2} = u$ 使得 v_k 定义在 W_k 上，v_{k+1} 是 v_k 的拓展，而对任何迷向点 $x \in U_k$ 我們有 $\bar{v}_k(x) = g(x)$（J. Dieudonné[8]，298—299 頁）. 那么从 E 到它自身之上的一一半綫性映射 u 就使得 $\bar{u}(V) = \varphi(V)$ 对 $N_r(E)$ 中的每一个 V；此外，由一个不是全迷向的迷向直綫只包含一个迷向点这个性质所刻划，即可推出它是同样性質的一条直綫在 $\bar{u}$ 之下的象，那么可以証明 u 将两个正交向量变到两个正交向量；于是証明的最后一部分就和 e) 中的証明完全一样了.

附註. 1) 我們不仅可以研究从 $N_r(E)$ 到它自身之上的保持粘切的变換，而且可以更一般地考察与 E 的維数相同的另外一个空間 E'，定义在 $E' \times E'$ 上的一个非退化的，厄米特或反厄米特的，与 f 有相同指数 $r+1$ 的半双綫性形式，并研究从 $N_r(E)$ 到 $N_r(E')$ 上的一一变換 φ，而 φ 和它的逆都保持粘切关系不变. 和上面相同的証明指出，E, E' 的基域 K, K' 应該同构，而且 $\varphi = \bar{u}_r$，其中 u 是一个从 E 到 E' 上的一一半綫性映射而且使得 $f'(u(x), u(y)) = \mu(f(x,y))^\sigma$，$\sigma$ 是对应于 u 的从 K 到 K' 上的同构而 μ 是 K' 中一个非零元素.

2) 上面的論述容易推到 K 是特征数等于 2 的域，Q 是 E 上指数 $r+1 \geqslant 1$ 的无亏数的二次形式这个情形；如果把 $P(E)$ 中的射影綫性流形 $V = P(W)$ 称为**奇异流形**，其中 W 在 E 中(对于 Q 而言)是奇异的，那么本节开始所叙述的基本定理仍然成立，而它的証明除了需要将全迷向流形用奇异流形代替之外并不需要加以改变 (J. Dieudonné[8]).

3) 上面在 $r \geqslant 2$ 这个假設下証明的基本定理当 $r=0$ 时并不成立，因为这时 $N_r(E)$ 中任何两个流形都自然滿足"粘切"条件；当 K 是域而 f 是对称双綫性形式时定理对于 $r=1$, $n=4$ 这个情形仍然不成立，这可从下述事实推出；这时 $N_r(E)$ 是两个子集 $N_r^+(E)$ 和 $N_r^-(E)$ 的併集，而属于它們之中任意一个的两个流形永不相粘切，可是 N_r^+ 的一个流形和 N_r^- 的一个流形永远相粘切("二次曲面"的母綫的古典性質，見第二章 § 6 及本章 § 4). 任何一个将 N_r^+ 中流形任意互相变动同时将 N_r^- 中流形任意互相变动的变換 φ 都适合定理中的条件. 我們不知道当 $r=1$ 时定理在其余情形是否成立.

4) 周煒良的結果包括华罗庚以前証明的用矩陣論表述的定理(見华罗庚[1,2,4,6])作为特殊情形[1). 例如，考察 E 是偶数 $2m$

1) 华罗庚的討論是从矩陣几何的仿射形式出发，討論了它的代数应用并推出矩陣几何的射影形式. 周煒良只討論了矩陣几何的射影形式，从射影形式推仿射形式似乎不很直接——譯者註.

維的空間而 f 是交錯形式（因之 K 是域）的情形．設 $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 2m}$ 是 E 对于这个形式的一組辛基；为了保持华罗庚文章中的符号，令 E 中每个向量与由它在基 (e_i) 中的坐标所組成的 1 行 $2m$ 列的矩陣相应，而对于 m 个向量 $z_1, \cdots, z_m$，用 (X, Y) 表以 z_i 作为行向量的 m 行 $2m$ 列的矩陣，而 X 和 Y 都是 m 級方陣．如果 $z'_1, \cdots, z'_m$ 是另外 m 个向量，(X', Y') 是它們所对应的矩陣，可以驗証矩陣 $(f(z_i, z'_j))$ 就是

$$F(X, Y, X', Y') = (X, Y)\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^tX' \\ {}^tY' \end{pmatrix}.$$

表明 m 个向量 z_i 两两正交的条件可写成矩陣形状：

$$F(X, Y, X, Y) = 0. \tag{1}$$

此外，由 z_i 生成的（全迷向）子空間 W 的維数是 m 的充分必要条件显然是矩陣 (X, Y) 的秩为 m．当一对 m 級方陣适合这些条件时，华罗庚把它称为一个对称偶；如果 Y 的秩是 m，那么条件(1)就可以写作 $(Y^{-1}X) = {}^t(Y^{-1}X)$，这表明矩陣 $Y^{-1}X$ 是对称矩陣．两个对称偶 (X, Y)，(X_1, Y_1) 定义同一个全迷向子空間的充分必要条件是存在一个 m 級可逆方陣 Q 使得 $(X_1, Y_1) = Q(X, Y)$；当 Y 和 Y_1 可逆时，从这个条件就推出 $Y_1^{-1}X_1 = Y^{-1}X$．空間 $N_r(E)$ 可以看作是对称偶关于上面这个等价关系的等价类的集合，也可以看作是 m 級对称矩陣的全体"加上"（对应于不可逆的矩陣 Y 的）"无穷远元素"所得到的集合．此外，我們可以証明，如果 $V = P(W)$，$V_1 = P(W_1)$ 分别对应于两个对称偶 (X, Y)，(X_1, Y_1)，那么 V 和 V_1 的算术距离就等于方陣 $F(X, Y, X_1, Y_1)$ 的秩（或等于它們所对应的对称矩陣的差 $Z_1 - Z$ 的秩，如果 Y 和 Y_1 都可逆）．利用这些定理自然容易解释周煒良的定理；我們有兴趣指出，用矩陣語言，变换 φ 可以用"非齐次坐标"

$$Z \to a(AZ^\sigma + B)(CZ^\sigma + D)^{-1}$$

写出，其中 $a \in K$ 而方陣 A, B, C, D 适合下列条件

$$A \cdot {}^tB = B \cdot {}^tA,\ C \cdot {}^tD = D \cdot {}^tC,\ A \cdot {}^tD - B \cdot {}^tC = I.$$

§4. 保持"粘切"的变换

II. 迷向流形空間中的变换(續)

仍采用 §3 中的符号，設K是特征数 $\neq 2$ 的域，f 是一个对称双綫性形式，n 是偶数而 r 等于它的极大值$(n-2)/2$. 我們已經指出(第二章 §6)，这时空間 $N_r(E)$ 对于旋轉羣 $O_n^+(K,f)$ (或它在射影羣中的象)分解成两个传递类 $N_r^+(E)$, $N_r^-(E)$；此外,如果 V_1, V_2 是 $N_r(E)$ 中的两个流形. 那么它們属于同一个传递类的充分必要条件是 $V_1\cap V_2$ 的維数是形状 $r-2k$ 的整数(k是整数)；于是我們說 V_1 和 V_2 相粘切,如果 $V_1\cap V_2$ 是 $r-2$ 維的. 有了这些定义之后,我們就有下面这个定理(周煒良[1]):

当 $r\geqslant 4$ 时，从 $N_r^+(E)$ 到它自身之上的一一变换 φ，如果具有性質 φ 和 φ^{-1}，都将两个相粘切的流形变到两个相粘切的流形，就必为形状 $\bar{u}_r$，其中 u 是一个半类似变换.

我們仍然考察属于 $N_r^+(E)$ 的两两相粘切的綫性流形的极大集,并陆續証明以下諸性質:

a) 一个极大集由 $N_r^+(E)$ 中与 $N_r^-(E)$的同一个流形交于一个 $r-1$ 維流形的全体流形所組成(第一类极大集)，或由 $N_r^+(E)$ 中包含同一个 $r-3$ 維全迷向流形的全体流形所組成 (第二类极大集)；

b) 第一类极大集在φ之下的象仍是一个极大集,但它可以是第一类的或第二类的.可是,如果对于一个第一类极大集 $\mathfrak{M}$, $\varphi(\mathfrak{M})$ 是第一类的，那么每一个第一类极大集在 φ 之下的象都是第一类的；

c) 如果 $r\geqslant 4$，那么第一类极大集的象就不能是第二类的.由此推出,可以将φ拓展到整个 $N_r(E)$之上,使得φ适合 §3 中定理的条件,于是只要应用这个定理就能完成証明.

我們可以如下表述使得 $\bar{u}_r$ 将 $N_r^+(E)$ 变到它自身之上的半类似变换 u：容易看出,如果V是 $N_r^+(E)$ 中的一个流形,就存在一个

将V保持不变而与u有相同乘子和相同自同构的半类似变换v，那么$v^{-1}u$就是一个将V变到$N_r^+(E)$中另外一个流形的正交变换，因而一定是一个旋轉.

附註. 1）我們可以把上面的結果推广到两个不同的空間E，E'和一个从$N_r^+(E)$到$N_r^+(E')$之上的映射φ的情形去(見 § 3)；

2）如果K的特征数是2，而Q是E上的一个具最大指数的无亏数二次形式，我們已經看到$N_r(E)$对于旋轉羣$O_n^+(K, f)$仍然分解成两个传递类$N_r^+(E)$，$N_r^-(E)$(第二章 § 10)；因此上面的結果不需要作任何修改就可以推到$N_r^+(E)$的变换去；

3）当$r=1$和$n=2$时，周煒良的定理并不成立，因为这时$N_r^+(E)$中任意两个流形都适合"粘切"条件. $r=3$也是例外情形. 实际上，从"检験性(Trialite)"理論 (C. Chevalley[1]，第四章)可以推出，这时存在一个从$N_r^-(E)$到$N_0(E)$上的一一变换将两个相粘切的流形变到两个正交的迷向点；这样一个变换就决定一个从$N_r^+(E)$到它自身之上的一一变换φ_0，而它将一个第一类极大集映到一个第二类极大集. 由此立刻推出，适合定理条件的变换φ的形状是$\bar{u}_r$或$\varphi_0\bar{u}_r$；

4）將周煒良的定理譯成矩陣的語言，就得到一个将反对称矩陣的全体适当地添上"无穷远元素"之后所得到的集合的定理；

5）假定K是特征数$\neq 2$的域，格拉斯曼空間$G_r(E)$对于$n=2r+2$和一个交錯或对称形式f的空間$N_r(E)$、对于$n=2r+2$和对称形式f的空間$N_r^+(E)$都是无奇点的不可約代数流形，而它們都能够嵌在一个射影空間S中. 在这些条件下，周煒良[1]証明除了$N_1^+(E)$之外，从这样一个流形到它自身之上的任何双方有理而且双方正則的变换都是由$GL(E)$的一个变换誘导出来的. 証明的想法是将 § 3 和 § 4 中引进的"粘切"概念翻譯成S中的几何概念：两点在$G_r(E)$(或$N_r(E)$)中相粘切，如果連接它們的直綫整个包含在$G_r(E)$(或$N_r(E)$)中；两点在$N_r^+(E)$中相粘切，如果它們落在包含在$N_r^+(E)$中的一个二次曲綫上. 那么問題就化为要証明所研究的这些流形的任何双方有理而且双方正則

的变换都将直綫变到直綫(或将二次曲綫变到二次曲綫)；这就是要研究这些流形上沒有基点的完全系統，特别是由这些流形的超平面截面所生成的系統.

当K是复数域时，在前面的定理中，我們可以将变换是双方有理而且双方正則这个假設用它是一一的解析变换这个假設来代替；这时論証的方法是类似的，只要将完全綫性系統用同調类代替就行了(周煒良[1]).

§ 5. 刻划典型羣的其他方法

設K是特征数$\neq 2$的域，E是K上維数$n \geqslant 2$的向量空間，$f(x, y)$是E上的一个非退化对称双綫性形式. 对于E中每一个向量x，$f(x, x)$都是K中的平方元素的充分必要条件是K为毕氏域(这就是說，任意两个平方元素的和仍是平方元素)而且E中存在一組正交集$(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$使得$f(e_i, e_i) = 1$对$1 \leqslant i \leqslant n$. 此外，$f$为絕对非迷向形式的充分必要条件是$-1$不是$K$中平方元素之和，換言之，$K$是可序的. 通常实数域上的欧氏几何就是适合上面这些条件的情形. 这些性質蘊涵E中的"自由易动性"，我們可以将它用下述方式表述出来：假定K是有序域，所謂关联半空間的i維鏈是指从E中i个向量的自由族$(a_k)_{1\leqslant k\leqslant i}$出发所定义的一个序列$(H_k)_{1\leqslant k\leqslant i}$，而$H_k$是綫性組合$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j$的集合，其中最后一个系数$\lambda_k \geqslant 0$. "自由易动性"就是說在上面所列举的条件下，給了两个关联半空間的n維鏈，正交羣$O_n(K, f)$中总存在一个而且是唯一的一个变换将其中的一个鏈变到另外一个鏈."黑尔姆荷尔茲(Helmholtz)問題"就是要刻划$GL_n(K)$中具有"自由易动性"的子羣. 当K是实数域时，这个問題已經解决了好几次，而常是用无穷小方法解决的(見 G. Pickert[1]中的文献). 貝尔(R. Baer)[1]将它推广成更一般的形式而且解决了，他假設K是有序体，但不一定交换，而且証明下面这个定理.

如果$GL_n(K)$的子羣G具有自由易动性(对于$n \geqslant 3$)，則K

一定是毕氏域同时 G 是对于一个非退化的对称形式 $f(x,y)$ 的正交羣 $O_n(K,f)$，其中 $f(x,x)$ 对于 E 中一切 $x\neq 0$ 都是 K 中一个 $\neq 0$ 的平方元素。

証明的想法是利用自由易动性. 对于 E 的每一个子空間 V，G 中都存在唯一的一个以 V 为正空間的对合，使 V 与这个对合的負空間相应；于是，我們就能在 E 的子空間中定义一个"正交关系"，特別，它定义了一个从 E 的直綫集合到 E 的超平面集合之間的一一映射，换言之，一个从 $P(E)$ 到 $P(E^*)$ (E^* 是 E 的对偶空間)之上的一一映射；因为这个映射将 $P(E)$ 中的直綫映到 $P(E^*)$ 中的直綫，所以可以应用射影几何的基本定理，同时可以証明上面所定义的"正交性"与对应于 E 上一个一定是絕对非迷向的自反半双綫性形式 $f(x,y)$ 的直交关系相合. 此外，从自由易动性还容易推出，E 中任意两条直綫可以用 G 中对合的一个乘积互变；f 是对称形式的証明比較細致，由此即推出 K 是毕氏域. 最后，再注意到 G 中的对合与 $O_n(K,f)$ 中的对合相重，于是就完成了証明.

如果假定 K 是欧氏有序域（所謂欧氏就是假定 K 中 $\geqslant 0$ 的元素都是平方元素），那么当 $n=2$ 时定理也成立 (R. Baer[1]).

此外，如果用 $n-1$ 維鏈代替自由易动性中的 n 維鏈，那么 R. Baer[1]証明，当 $n\geqslant 3$ 时得到的类似于自由易动性的性质刻划出具有自由易动性的正交羣 $O_n(K,f)$ 的旋轉子羣 $O_n^+(K,f)$. 皮克特 (G. Pickert) ([1] 398 頁) 的一个例子指出，这个結果当 $n=2$ 时并不成立.

梯茨 (J. Tits)[1] 将域 K 上的射影羣 $PGL_2(K)$ 看作是射影直綫 $P_1(K)$ 的置换羣而用传递性給出 $PGL_2(K)$ 的一个刻划方法. 实际上，$PGL_2(K)$ 具有三重传递性，这就是說，如果 (a,b,c)，(a',b',c') 是 $P_1(K)$ 中两組三点集，其中每一組都是由三个不同的点所組成的，那么这个羣里存在一个而且是唯一的一个变换将 a 变到 a'，b 变到 b'，c 变到 c'. 仅仅这个条件对于刻划 $PGL_2(K)$ 来說是不够的，可是梯茨曾經宣布过（見上面所引的文献）好几个补充条件，把它們加到三重传递性上就可以推出所考察的羣与一个

$PGL_2(K)$ 同构．这些条件是由射影几何的古典定义和作法所启示的；例如，集合 E 上的一个三重传递置换羣 G 是一个 $PGL_2(K)$，如果对于 E 中任意一对不同的元素 a,b,G 中任意一对将 a 和 b 都保持不变的变换都由交换的变换組成．再者，这些方法使梯茨（J. Tits）[1] 完全决定了一切有限三重传递置换羣．最近他又将这个結果推广到域 K 上的射影羣 $PGL_n(K)$，而 n 任意（J. Tits[2]）．集合 E 上的一个置换羣称为几乎 n 重传递，如果 E 中存在由 n 个点組成的"标架"（n 个点具有如下性质，就称为一个"标架"：只有单位元素将它們之中的每一个都保持不变），而且对于任意两个由 n 个点所組成的"标架"(a_i) 和 (b_i)，G 中都存在一个（而且是唯一的一个）变换将每一个 a_i 变到 $b_i(1 \leqslant i \leqslant n)$．深入研究这个概念就可以将羣 $PGL_n(K)$ 在几乎 n 重传递的羣中刻划出来．

巴赫曼（F. Bachmann）[1] 給出另外一个刻划 $PGL_2(K)$ 的方法（K 是特征数 $\neq 2$ 的域），这个方法依赖于这个羣的每一个变换都可以写作两个对合的乘积（这个事实由第二章 §9 中看到的 $PGL_2(K)$ 与一个旋轉羣 $O_3^+(K,f)$ 同构，其中 f 的指数等于 1，和第二章§6中指出的每一个旋轉都可以表作两个反演的乘积推出）．巴赫曼指出，我們如何能够从具有上述性质的羣中用四个对合（其中只出現羣）和它們的乘积的补充条件以及这样一个乘积是否为一个对合的性质来将 $PGL_2(K)$ 刻划出来．施密特（A. Schmidt）[1] 和巴赫曼（F. Bachmann）[1] 給出一个刻划羣 $O_3^+(K,f)$ 的类似方法，其中 K 的特征数 $\neq 2$ 而 f 的指数是0（可以把 $O_3^+(K,f)$ 看作一个橢圓非欧几何的位移羣）．借助于对合，貝尔（R. Baer）[2] 用另外許多組条件来刻划这些羣．无疑，下面所述是最値得注意的：对于每一个羣 G，令与 G 一一对应的集合 P（"点"的集合）和 H（"超平面"的集合）与 G 相应．然后定义"点 p 在超平面 h 上"这个关系，如果 ph 是 G 中一个对合（将 p 和 h 都看作是 G 中与它們相应的元素）．这样就可以在 P 中定义一个"綫性相关"的概念．p 与一个点集 S 綫性相关，如果它含于包含 S 一切点的每一个超平面中．然后我們再定义 P 中的"綫性流形"为具有下述性质的集合 M，即与 M 綫性相

关的每一个点都在M中．这样，P中的"綫性流形"适合維数$n>1$的射影几何公理的充分必要条件就是G与一个椭圓几何的位移羣同构，再者这时我們还有$n=3$．

第四章　典型羣的自同构与同构

§1. 羣 $GL_n(K)$ 的自同构

已知的研究一个典型羣 G 自同构（或这样一个羣与另一个同一性質的羣之間的同构）的大部分方法依賴于羣 G 中对合的研究以及自同构(或同构)将对合变到对合这件事实．第一章对典型羣的对合所作的研究指出，我們可以让一个对合对应这个羣所作用的空間上的两个子空間，于是 G 的自同构就誘导出这些子空間之間的一个变换，而在大部分情形，射影几何的基本定理(第三章§1)可以指出，这个变换产生一个直射变换或对射变换，最后就可以把 G 的自同构决定出来．

我們从研究羣 $GL_n(K)$ 的自同构开始，其中 K 是一个交换的或不交换的体；在 K 的特征数 $\neq 2$ 和 $= 2$ 两种情形，$GL_n(K)$ 中对合的标准形状有所不同，我們分别研究这两个情形．

I. $n \geqslant 3$, K 的特征数 $\neq 2$．我們説一个 $(p, n-p)$-对合(第一章 §3)是极对合，如果 $p = 1$ 或 $p = n-1$．第一步在于証明

1) $GL_n(K)$ 的每一个自同构都把极对合映到极对合．

要証明这一点，只需要利用羣 $GL_n(K)$ 的构造而不利用将它看作是作用于 n 維向量空間 E 上的一切綫性直射变换所組成的羣，这个定义把极对合从 $GL_n(K)$ 的全部对合中刻划出来．我們可以用几种方法进行，这几种方法都是发展了馬凱(G. W. Mackey)[1] 的一篇論文中的想法．最快的方法无疑是下面这一个（J. Dieudonné[7]，第5頁）．我們考察 $GL_n(K)$ 中两两交换的(在 $GL_n(K)$ 中)共軛对合的极大集．利用与 $GL_n(K)$ 中一个对合交换的变换，必将这个对合的特征子空間(整体地)保持不变，这件事实就容易看到由 $(p, n-p)$-对合所組成的极大集包含 $\binom{n}{p}$ 个元素，而每一

个$(p, n-p)$-对合都(至少)属于这样一个集合；由此即得到一个刻划极对合的方法。

黎卡特 (C. Rickart)[1] 所創立的另一个方法仍是从馬凱 (G.W.Mackey)[1] 的想法出发的，这个方法的好处在于我們将会看到 (§§3,4,7) 它的一系列推理方法可以推广到其它的典型羣去。一般說来，設 S 是 $GL_n(K)$ 中对合的一个集合，以 $c(S)$ 表与 S 中每一个对合都交换的对合的集合。对于两个互相交换的对合 u, v，以 $\nu(u, v)$ 表 $c(c(u, v))$ 中元素的个数；而对于每一个对合 u，以 $\nu(u)$ 表当 v 跑过与 u 交换的对合的集合时，$\nu(u, v)$ 这个数的极大值。那么可以証明，如果 u 不是极对合，則 $\nu(u) = 16$；如果 u 是极对合，則 $\nu(u) = 8$，这就給出刻划极对合的一个新方法(当 $n = 2$ 和 $n = 3$ 时任何对合都是极对合)。

下一个步驟是研究极对合的极小偶(根据馬凱)：依定义，两个极对合 u, v 組成一个极小偶，如果它們不交换但是它們有一个公共的子空間。我們証明

2) $GL_n(K)$的每一个自同构都把极对合的极小偶映到极对合的极小偶。

这仍然需要只用仅包含羣的构造的性質来刻划极小偶。馬凱所設想的方法(見上面所引的文献)基于下面这个性質：如果 u 和 v 是两个不交换的极对合，它們組成一个极小偶当且仅当对于任意一对属于 $c(c(u, v))$的不交换的极对合 u', v'，我們有 $c(c(u', v')) = c(c(u, v))$。

从这里出发，我們可以用两种不同的方法进行 (对于 $n \geqslant 3$)。第一种方法是让每一个极对合与由它的特征子空間所組成的偶 (D,H)相应，其中D是一条直綫，H是一个超平面而 $D+H=E$；于是自同构φ就确定了这些偶的集合里的一个置换 ψ。我們說两个极对合的极小偶(u_1, v_1)，(u_2, v_2)相似，如果 u_1, v_1 的公共特征子空間的維数与 u_2, v_2 的公共特征子空間的維数相同；那么我們容易証明φ将两个相似的极小偶映到两个相似的极小偶 (C. Rickart[1]，459 頁)。根据 2)，ψ就将对应于同一条直綫D的一切偶(D,H)映

到对应于同一条直綫的偶的集合或对应于同一个超平面的偶的集合，而不論所考察的是那一条直綫 D，总出現同一个情形．于是 ψ 就决定了一个一一映射 θ，θ 或者将 $P(E)$ 映到自身之上，或者将 $P(E)$ 映到 $P(E^*)$ 之上．此外，如果我們考察 E 中位于同一个平面之上的三条不同的直綫 D_1, D_2, D_3 和一个不包含这三条直綫中任意一条的超平面 H，我們容易看到，如以 u_i 表对应于偶 (D_i, H) 的对合 $(i=1,2,3)$，那么每一个 u_i 都属于由另外两个对合所决定的集合 $c(c(u_j, u_k))$；由此就毫无困难地推出 θ 将 $P(E)$ 中在一条直綫上的三点 D_1, D_2, D_3 映到在一条直綫上的三点．于是我們可以应用射影几何的基本定理（第三章 §1），那么或者存在 E 的一个直射变换使得 $\bar{g}=\theta$，或者存在从 E 到 E^* 上的一个对射变换 h 使得 $\bar{h}=\theta$．在第一种情形，对于一切极对合而言，θ 与自同构 $u \to gug^{-1}$ 相重，在第二种情形，对于一切极对合而言，θ 与自同构 $u \to g\check{u}g^{-1}$ 相重，其中 $\check{u}$ 表 u 的逆步变换．假定第一种情形发生，因为每一个平延都是两个极对合之积，而 $SL_n(K)$ 由平延生成，所以自同构 φ 与自同构 $u \to gug^{-1}$ 在 $SL_n(K)$ 上一致．研究自同构 $u \to g^{-1}\varphi(u)g$，記作 φ_0，則自同构 φ_0 将 $GL_n(K)$ 中一切平延都保持不变；如果 t 是任意一个平延，u 是 $GL_n(K)$ 中任意一个元素，那么 utu^{-1} 仍是一个平延，因此 $\varphi_0(u)t(\varphi_0(u))^{-1}=utu^{-1}$，这就証明了 $u^{-1}\varphi_0(u)$ 与所有的平延都变换，因此将 E 中所有直綫都保持不变，于是它是一个**中心位似变换** $\chi(u)$；更进一步，显然 $u \to \chi(u)$ 是从 $GL_n(K)$ 到它的中核 Z_n 之中的一个同态．最后看到，在我們研究的情形下有

$$\varphi(u)=\chi(u)gug^{-1}, \tag{1}$$

χ 是 $GL_n(K)$ **到它的中核 Z_n 之中的一个同态**，而 g **是 E 的一个直射变换**．将 φ 在 Z_n 上的限制是一一的这件事实用(1)式写出来就可以发現 χ 适合下述必要条件：将 Z_n 与 K 的中心的乘法羣視为同一，則关系式 $\chi(\zeta)=\zeta^{-1}$ 应該蘊涵 $\zeta=1$．显然这个条件也是充分的。

如果第二种情形发生，我們同样可以得到

$$\varphi(u) = \chi(u) h \check{u} h^{-1}, \quad (2)$$

χ 是从 $GL_n(K)$ 到它的中核 Z_n 之中的一个同态(而且适合同样的条件),而 h 是从 E 到 E^* 之上的一个对射变换.

求得这些結果的另外一个方法是利用上面已經提到的每一个平延都是組成一个极小偶的两个极对合之积以及其逆，即任意两个組成极小偶的极对合之积一定是一个平延. 由此立刻推出，φ 将平延映到平延. 然后我們再采用施萊尔 (O. Schreier) 和范德威尔登 (B. L. van der Waerden) ([1], 315—316 頁)的一个推理方法，这个推理方法基于两个平延 t_1, t_2 的乘积，仅当 t_1 和 t_2 有相同的超平面或相同的直綫时，才仍然是一个平延这件事实. 因此 $GL_n(K)$ 的一个子羣由平延(及单位元素)所組成，仅当它是由具同一个超平面 H 的平延所組成的羣 $T(H)$ 时或它是由具同一条直綫 D 的平延所組成的羣 $T(D)$ 时；此外，一个平延属于 $T(D) \cap T(H)$ 仅当 $D \subset H$，而一个羣 $T(H)$ 不能在 $GL_n(K)$ 中与一个羣 $T(D)$ 共軛. 从这些注意立刻推出，φ 定义了一个从 $P(E)$ 到 $P(E)$ 之上或到 $P(E^*)$ 之上的一个一一映射 θ；譬如第一种情形发生，θ 就将一个超平面上的点映到在一个超平面上的点，于是我們可以象上面一样将証明进行完毕.

II. $n \geqslant 3$, K 的特征数 $= 2$. 这时平延是 $GL_n(K)$ 中的 $(1, n-1)$-对合；因此只要利用仅包含羣的构造的性质将它們与其余的对合区别开来就行了；然后利用上面提到的施萊尔-范德威尔登(Schreier-van der Waerden) 方法就可以象 I 中一样得到同样的結論. 仅当 $n \geqslant 4$时才需要加以区别. 当 $n \geqslant 6$时，注意两个相交换的平延之积是一个平延或一个$(2, n-2)$-对合而两个相交换的$(p, n-p)$-对合之积可以属于$GL_n(K)$中两个以上的共軛元素类，若 $p > 1$ (J. Dieudonné[7])，因而得到了要找的区别. 当 $n=4$ 和 $n = 5$ 时需要区别 $GL_n(K)$ 中对合的两个共軛元素类 C_1 和 C_2. 为此，对于一个对合 u，我們考察与 u 交换而且与 u 不属于同一共軛类的对合的集合 $P^*(u)$，然后再考察与 $P^*(u)$ 中每一个对合都交换而属于 u 的共軛元素类的对合的集合 $P^{**}(u)$. 如果 u 是一

个平延，$P^{**}(u)$中任意两个元素的乘积仍在 u 的共轭元素类之中，可是当 u 不是平延时却不是这样的.

III. $n=2$. 如果K的特征数 $=2$, II 中的推理仍然証明出φ将平延映到平延，因而决定了一个从射影直綫 $P_1(K)$ 到它自身之上的一个一一映射. 我們总可以假定这个映射将 $P_1(K)$ 中一点(取作无穷远点)保持不变，因而定义了一个从 K 到它自身之上的一一映射 $t\to t^\sigma$; 我們还可以假定 $0^\sigma=0$, $1^\sigma=1$. 此外，利用若 s 和 t 是平延，則 sts^{-1} 也是平延这个事实，容易推出两个关系式 $(x+y)^\sigma=x^\sigma+y^\sigma$ 及 $(xyx)^\sigma=x^\sigma y^\sigma x^\sigma$ (O. Schreier-B. L. van der Waerden[1], 317—318 頁). 于是根据华罗庚[7]的一个定理就推出 $t\to t^\sigma$ 一定是K的一个自同构或反自同构，那么容易推出φ的形状是(1)或(2)二者之一.

这个方法也被施莱尔和范德威尔登用来研究K是特征数 $\neq 2$ 的域的情形，但在他們証明 φ 将平延映到平延(頂多差一个符号)的推理过程中有一个錯誤. 这一事实已經被华罗庚[5] 証明了，他指出(当K是域时)可以用下述性质来刻划平延t:如果K的特征数 $p\neq 0$, 我們有 $t^{2p}=1$; 如果K的特征数是 0，平延 t 是 $SL_2(K)$中那种元素，即 $SL_2(K)$ 中存在无穷多个与 t 共軛而且与 t 交换的元素. 因此φ的形状仍然是(1)或(2)二者之一.

最后，基于上面这个結果，华罗庚[9]証明，当K是任意非交換体时，$GL_2(K)$ 的任何自同构都由公式(1) 和 (2)給出. 因此决定 $GL_n(K)$ 的自同构这个問題全部解决了.

附注. 1) E 的直射变换羣 $\Gamma L_n(K)$ 的自同构 (当 $n\geqslant 3$ 时)仍然由公式(1)和(2)給出，其中 χ 是从 $\Gamma L_n(K)$到 Z_n 中的一个映射且适合关系式 $\chi(u_1u_2)=(\chi(u_2))^{\sigma_1}\chi(u_1)$，$\sigma_1$ 是对应于 u_1 的K的自同构 (C. Rickart[3]). 实际上，只要証明 $GL_n(K)$ 的极对合在 $\Gamma L_n(K)$ 的一个自同构之下仍然映到一个极对合就行了. 首先假定K的特征数 $\neq 2$; 根据第一章 § 3 中对于 $\Gamma L_n(K)$ 中对合所作的研究，我們容易看到对于 $\Gamma L_n(K)$ 中不属于 $GL_n(K)$ 的任何对合 u，总存在 2^n 个 (在 $\Gamma L_n(K)$ 中) 与 u 共軛的两两交換的对合

(J. Dieudonné[7],第 9 頁);这就可以将这种对合与极对合区别开来. 如果 K 的特征数是 2, 注意若 u_1, u_2 是 $\Gamma L_n(K)$ 中不属于 $GL_n(K)$ 的两个对合同时它們在 $\Gamma L_n(K)$ 中共軛而且交换,那么它們的乘积属于 $GL_n(K)$, 因而不与 u_1 共軛,这与当 u_1 和 u_2 是平延时的情形相反 (J. Dieudonné[7], 17 頁);后面这个推理方法当 $n = 2$ 时亦可应用,因此給出当 K 是特征数 $= 2$ 的体时 $\Gamma L_2(K)$ 的自同构.

2) 黎卡特 (C. Rickart)[1,3] 指出, 怎样推广他的方法去确定綫性羣 $GL(E)$ 的自同构,而 E 是特征数 $\neq 2$ 的体上的无穷維向量空間. 馬凱 (Mackey)[1] 是在討論与这个問題相类似的問題 (K 是实数域或复数域)时,引进了他的"极小偶"方法.

我們再举出艾尔立希(G. Ehrlich)[1] 所給的另外一个推广:他用与馮·諾曼的"連續几何"相当的"正則"环中的可逆元素所組成的羣代替我們討論的 $GL_n(K)$.

§2. 羣 $SL_n(K)$ 的自同构

显然, $GL_n(K)$ 的每一个自同构(依上节, 它的形状是(1)或(2))都誘导出 $SL_n(K)$ 的一个自同构,只要 χ 在 $SL_n(K)$ 上的限制是这个羣在它的中核里的一个表示. 因为 $SL_n(K)$ 是它自己的换位子羣,除非 $n = 2$ 而 $K = \mathbf{F}_2$ 或 $K = \mathbf{F}_3$ (第二章 §2),所以除了这两个情形可能是例外, 我們一定有 $\chi = 1$; 可是, 当 $n = 2$, $K = \mathbf{F}_2$ 时, SL_2 的中核是单位元素,而当 $n = 2$, $K = \mathbf{F}_3$ 时, SL_2 的换位子羣在 SL_2 中的指数等于 3,而 SL_2 的中核是 2 阶的,因此在一切情形 χ 一定都等于 1.

我們希望知道,反之,$SL_n(K)$ 的每一个自同构都是由 $GL_n(K)$ 的自同构誘导出来的. 我們証明,除了一个情形这个問題仍未解决外,在其余情形这个問題已經肯定地解决了.

首先, 如果 K 是特征数 $\neq 2$ 的体而 n 是奇数, 那么 $SL_n(K)$ 包含$(1, n-1)$-对合,因此 §1 中的推理方法当 $n \geqslant 3$ 时仍可以应用; 又如果 K 是特征数 $\neq 2$ 的体而 -1 属于 K^* 的换位子羣 (例

如，四元数体就是这样的）时也行，因为这时 $GL_n(K)$ 中每一个对合都属于 $SL_n(K)$. 最后，如果 K 是特征数 $=2$ 的体，则平延都属于 $SL_n(K)$；这时 §1 中的方法利用到同一类型 $(p, n-p)$（其中 $2p \leqslant n$）的两个对合都在羣 $GL_n(K)$ 中共軛这件事实；如果 $2p < n$，它們仍然在 $SL_n(K)$ 中共軛，可是当 $n = 2p$ 时，它們并不一定在 $SL_n(K)$ 中共軛. 然而我們可以証明，用来証明 $GL_n(K)$ 的自同构将平延映到平延的推理方法不必加以修改即可应用到 $SL_n(K)$ 的自同构上去，除非 $n = 4$. 在最后这个情形，需要利用另外一个方法来証明这件事实；狄多涅 (J. Dieudonné) 在[7]中 17 頁上所指出的方法依賴于一个不正确的断言；这个錯誤已由华罗庚和万哲先改正[1]，因此有結論：当 K 是特征数等于 2 的体而 $n \geqslant 2$ 时，$SL_n(K)$ 的自同构皆由 $GL_n(K)$ 的自同构誘导出来.

剩下还需要研究 n 是偶数，K 是特征数 $\neq 2$ 的体而 -1 不属于 K^* 的换位子羣 C 中的情形. 这时，$GL_n(K)$ 的极对合不再属于 $SL_n(K)$；当 $n \geqslant 6$ 时我們可以对于 $(2, n-2)$-对合（它們永远属于 $SL_n(K)$）应用类似于 §1 中的方法，从而証明 $SL_n(K)$ 的每一个自同构仍然由 $GL_n(K)$ 的自同构誘导出来 (J. Dieudonné [7]，20—21頁). 当 $n=4$ 时，同样的事实是由华罗庚[9]用另外一方法証个明的：首先他研究了由行列式等于 K^*/C 中的单位元素或 -1 的象的那些綫性变換所組成的羣 $SL_2^{\pm}(K)$，并且証明它的自同构皆由 $GL_2(K)$ 誘导出来；然后他利用这个結果并采用一个相当复杂的推理，而决定了 $SL_4(K)$ 在所考察的情形的自同构.

最后，关于 $SL_2(K)$ 的自同构，問題在于利用只包含羣的构造的性质将平延刻划出来（因为 $SL_2(K)$ 不包含异于单位元素及其負元素的对合）；我們在 §1 的末尾看到，当 K 是域时这是可能的. 华罗庚和万哲先[1] 証明当 K 是特征数 $p > 0$ 的非交換体时，平延是羣 $SL_2(K)$ 中的 p 阶元素. 于是唯一沒有解决的情形是：K 是特征数 0 的非交換体而 -1 不属于 K^* 的換位子羣.

§3. 羣 $Sp_{2m}(K)$ 的自同构

我們知道辛羣 $Sp_2(K)$ 与么模羣 $SL_2(K)$ 相重（第二章 §4），而当 K 是交換域时，$SL_2(K)$ 的自同构已經知道（§2）. 因之可以只限于研究維数 $2m \geqslant 4$ 的情形；我們有下面这个結果：

辛羣 $Sp_{2m}(K)$ 的每一个自同构 φ 都可以写作形状 $\varphi(u)=gug^{-1}$，其中 g 属于羣 $\Gamma Sp_{2m}(K)$（第一章 §9），但 $m=2, K=\mathbf{F}_2$ 是一个例外情形.

这里的証明方法仍然依 K 的特征数是否等于 2 而有所区别.

I. K 的特征数 $\neq 2$. 第一个方法要利用羣 $Sp_{2m}(K)$ 中的对合. $Sp_{2m}(K)$ 中的一个对合称为**极对合**，如果它是 $(2, 2m-2)$ 或 $(2m-2, 2)$ 型的对合；我們可以利用两两交換的 $(2p, 2m-2p)$ 型对合（它們一定互相共軛）的一个极大集包含 $\binom{m}{p}$ 个元素这件事实将极对合从 $(2p, 2m-2p)$ 型对合中区別出来. 另外一个方法是研究 §1 中所定义的 $\nu(u)$ 这个数，并且証明若 $2m \geqslant 8$，则 $\nu(u)=16$，如果 u 不是极对合，而 $\nu(u)=8$ 如果 u 是极对合（当 $2m=4$ 或 $2m=6$ 时一切对合都是极对合（C. Rickart[2]））.

然后我們引进极对合的**极小偶**概念. 当 $2m \geqslant 6$ 时，它是由两个极对合所組成的偶 (u, v)，而这两个极对合的 2 維特征子空間有一个 1 維的交集. 于是我們可以証明，Mackey（关于 $GL_n(K)$ 中极小偶）的判断方法仍然将极小偶刻划出来，因此 $Sp_{2m}(K)$ 的每一个自同构都把极小偶变到极小偶（J. Dieudonné[7]，26 頁；C. Rickart[2]，710 頁）. 当 $2m=4$ 时，我們把两个不交換的对合所組成的偶 (u, v) 称为**极小偶**，如果 u 的一个特征子空間与 v 的一个特征子空間有一个 1 維的交. 这时我們仍然能够将极小偶从一切对合偶 (u, v) 中刻划出来，但需要研究对合偶 (u, v) 的中心化子的构造. 当 (u, v) 是极小偶时，它的中心化子是可解的，而当 (u, v) 不是极小偶时，中心化子就不可解（至少当 $K \neq \mathbf{F}_3$ 时；如果 $K=\mathbf{F}_3$，在这两种情形这两个羣的阶不相等）.

刻划了极小偶之后，利用这个刻划就可以証明：如果 $I(D)$ 是那些极对合的集合，它們的 2 維特征子空間包含同一条直綫 D，那么 $Sp_{2m}(K)$ 的每一个自同构都把 $I(D)$ 映到一个集合 $I(D')$；当 $2m \geqslant 6$ 时，这一点很容易証明（J. Dieudonné[7]，26—27 頁；C. Rickart[2]，711—712 頁）。当 $2m = 4$ 时，却需要另外一个相当长的推理(J. Dieudonné[7]，29—30頁)。然后令 $\psi(D) = D'$，我們就看到 ψ 是从 $P(E)$ 到它自身之上的一个一一映射而将 E 中两条正交的直綫映到两条正交的直綫，因此它将 $P(E)$ 中位于同一个超平面上的点映到同一个超平面上的点。于是就可以运用射影几何的基本定理(§ 1)推出最后的結果。

华罗庚[5]曾經用相当不同的一个方法，即对 m 用归納法并利用关于羣 $SL_2(K)$ 的自同构的知識（§ 2），得到这些結果：$Sp_{2m}(K)$ 的每一个自同构 φ 都把极对合映到极对合，因此可以化为研究 φ 将一个极对合保持不变的情形，于是 φ 亦将这个极对合的中心化子 Γ 保持不变，而这个中心化子是羣 $Sp_2(K)=SL_2(K)$ 与羣 $Sp_{2m-2}(K)$ 的直乘积。再利用归納法假設，更可以化为 φ 将 $Sp_{2m-2}(K)$ 中的元素保持不变的情形。最后再研究 Γ 的某些子羣在 φ 之下的象，就可以达到最終的結果。

II. K 的特征数等于 2. 我們仍然需要利用羣构造的性质将平延从 $Sp_{2m}(K)$ 的其余对合中刻划出来。当 $m \geqslant 3$ 时，研究一个对合在 $Sp_{2m}(K)$ 中的中心化子并証明(对 m 用归納法)羣 $Sp_{2m}(K)$ 不能与羣 $Sp_{2q}(K)$ 同构；若 $q < m$，就可以达到这一点。当 $m = 2$ 时，在相当复杂的区别平延与两种类型的(2,2)型对合的推理过程中，为了利用羣 $SL_2(K)$ 的单純性需要将 $K = \mathbf{F}_2$ 这个情形除外(J. Dieudonné[7]，37—38 頁)。再应用与 § 1 的推理方法（当 K 是特征数等于 2 的体时）相类似的一个方法就可以完成定理的証明。

定理对于羣 $Sp_4(F_2)$ 不成立，因为 $Sp_4(F_2)$ 与对称羣 $\mathfrak{S}_6$ 同构(§ 8)，而我們知道 $\mathfrak{S}_6$ 有外自同构。

§4. 羣 $U_n(K, f)$ 的自同构

（K 是特征数 $\neq 2$ 的体）

我們假定 f 是特征数 $\neq$ 2 的体 K 上的一个厄米特迹形式. 在上述条件下有

当 $n \geqslant 3$ 时,除了羣 $U_3(F_9)$ 和 $U_3(F_{25})$ 可能是例外, 羣 $U_n(K,f)$ 的每一个自同构都可以写作形状 $\varphi(u) = \chi(u)gug^{-1}$, 其中 g 属于羣 $\Gamma U_n(K,f)$ 而 χ 是从 $U_n(K,f)$ 到它的中核之中的一个同态.

象前面几节一样,証明的第一步是刻划出 $U_n(K, f)$ 中的极对合目,这时极对合只不过是对于 E 中非迷向超平面的对称. 用 §1 中所描述的馬凱-黎卡特方法仍然可以达到这一点(只有 $n \geqslant 4$ 的情形才需要討論). 对于 $U_n(K,f)$中的一个对合 u,我們有 $\nu(u)= 16$, 如果 u 不是极对合; 有 $\nu(u) = 8$, 如果 u 是极对合. 因此 $U_n(K, f)$ 的每一个自同构 φ 都把对称映到对称, 因此定义了一个从 E 的非迷向直綫的集合到它自身之上的——映射 ψ, 它将两条正交的直綫映到两条正交的直綫. 当 f 的指数等于 0 时,可以将射影几何的基本定理(第三章 § 1)应用到 ψ 上来,那么本定理卽可象前面几节一样推出(C. Rickart[2]).

反之,如果 E 中有迷向直綫, 我們需要証明, 可以将 ψ 拓展到整个 $P(E)$ 之上,使得 ψ 仍然将 E 中两条正交的直綫(迷向的或非迷向的)映到两条正交的直綫. 首先,我們注意, ψ 将在同一个非迷向平面 P 上的一切非迷向直綫都映到同一个非迷向平面 $\psi(P)$ 上的非迷向直綫, 这因为 P 中直綫都与 E 中 $n-2$ 条两两正交的非迷向直綫相正交,而且反之,与这 $n-2$ 条直綫正交的直綫一定在 P 中. 同样,可以証明,如果 P_1, P_2 是两个非迷向平面,其交集为一条迷向直綫,且其併集(它是 3 維的)是非迷向的,則它們的象 $\psi(P_1)$, $\psi(P_2)$ 具有同样性質.

現在假設 $n \geqslant 4$, 并設 Δ 是一条迷向直綫;我們証明,如果 P 跑过包含 Δ 的非迷向平面的集合 $I(\Delta)$, 則平面 $\psi(P)$ 包含同一

条迷向直綫$\psi(\Delta)$. 我們指出,这是下面这个命題的推論(J. Dieudonné[7],48—49 頁):如果P是一个非迷向平面,D是P中一条非迷向直綫,而a,b,c是D上三个不同的点,那么P中存在第四个点d,它不在D上而且使得向量$d-a$, $d-b$, $d-c$都是非迷向向量. 为了証明这个結果,显然可以假設$c=0$; 于是我們在通过O点而与D正交的直綫D'上选取d点, 只要函数$\xi \to \xi\alpha\xi^J$(α为K中对称元素)在K中取至少两个$\neq 0$的值. 利用与狄多涅(J. Dieudonné)[13]的374頁上类似的推理方法,可以証明最后这个性質当K是无限体时永远成立(如果K不交换,我們就考察α在K中的中心化子这个子体);如果K是有限域而J的不变子域K_0含5个以上的元素, 这个性質同样成立. $K_0=\mathbf{F}_5$这个情形可用一个略为不同的方法来处理, 可是$K_0=\mathbf{F}_3$这个情形需要用另外一个方法来(J. Dieudonné[7], 50—51 頁和 76—77 頁)証明直綫$\psi(D)$的存在性. 这样,我們仍然可以象上面一样应用射影几何的基本定理.

最后还剩下$n=3$这个情形;如果$J\neq 1$, 只要K含25个以上元素时, 射影平面几何学的一个推理方法仍然可以将ψ拓展到整个$P(E)$之上(J. Dieudonné[7],77—78 頁). 只要K中元素的个数相当多,这个推理方法也可以应用到正交羣上;可是如果这时利用$O_3^+(K,f)$与$PGL_2(K)$之間的同构(第二章 § 9)以及后面这个羣的自同构結果(見 § 6),将更为簡单.

羣$U_3(\mathbf{F}_9)$与$U_3(\mathbf{F}_{25})$的自同构还沒有决定出来,特征数2的无限体上酉羣和正交羣的自同构也沒有决定出来(見 § 7).

§ 5. 羣 $U_n^+(K,f)$ 的自同构

(K 是特征数 $\neq 2$ 的域)

如果n是奇数, $(1,n-1)$型的对合就属于$U_n^+(K,f)$, 因此 § 4 中的推理方法不必加以修改就可以应用到$U_n^+(K,f)$上. 如果n是偶数, $U_n(K,f)$中的极对合不再属于$U_n(K,f)$, 这时我們需要討論$(2,n-2)$型对合及$(n-2,2)$型对合. 但这时可以有

$v(u)=8$ 对于不是上面这两种类型的对合，因此在一般情形就不能由此得到将这两种类型的对合与其余对合区别开的方法. 然而，当形式 f 的指数 $\geqslant 1$ 时，可以刻划出$(2, n-2)$型或$(n-2, 2)$型的对合，若其 $n-2$ 維的特征子空間包含迷向向量，那么只要研究这样一个对合在 $U_n^+(K,f)$ 中的中心化子并(利用第二章中已經得到的关于酉羣的构造的結果)証明这个羣永远不与不是$(2,n-2)$型或 $(n-2, 2)$ 型对合的中心化子同构 (J. Dieudonné[7]，52—53 頁及 79—80 頁)，若 $n\geqslant 8$ (如果 $n\leqslant 6$，所有的对合都是这两种类型的对合，因此无需証明). 然后还需要用一个輔助性的推理方法 (利用两个对合交换的条件) 去証明 $U_n^+(K,f)$ 的每一个自同构都将一切 $(2,n-2)$ 型或 $(n-2,2)$ 型的对合映到这两种类型的对合(見上面所引的书，53—54 頁).

先假定 $n\geqslant 6$. 設 S 是 $(2,n-2)$ 型或 $(n-2,2)$ 型对合的集合，如果 u 和 v 是 S 中两个交換对合，以 U^+, V^+(或 U^-, V^-)表 u 和 v 的 2 維 (或 $n-2$ 維) 特征子空間，那么 $U^+\cap V^+$ 是 1 維的或 $U^+\subset V^-$ 而 $V^+\subset U^-$. 在第一种情形，我們說 u 和 v 非正則交換；在第二种情形，正則交換. 我們来区别这两种交换性：注意，当 $n>6$ 时，uv 属于 S 当且仅当 u 和 v 非正則交換；当 $n=6$ 时，則需要用另外一个推理方法(J. Dieudonné[7]，54頁及80頁). 这样，我們把 S 中两个对合 u,v，其 2 維特征子空間有一个 1 維的交，称为 S 中对合的极小偶；另一方面，对于 S 中任意两个对合 u,v，以 $c'(u,v)$ 表 S 中与 u 和 v 正則交換的对合的集合而以 $c'(c'(u,v))$ 表 S 中与 $c'(u,v)$ 里每一个元素都正則交換的对合的集合. 有了这些改动之后，馬凱的判断法(§1)仍然刻划出极小偶.

于是，我們可以象对于羣 $Sp_m(K)$ (§3) 所进行的一样，从 $U_n^+(K,f)$ 的一个自同构 φ 出发，定义一个从 $P(E)$ 到它自身之上的一个映射；容易証明，这个映射将 E 中两条正交的直綫映到两条正交的直綫. 因此象前几节一样，我們得到結論：

当 n 是 $\geqslant 6$ 的偶数时，$U_n^+(K, f)$ (K 是特征数 $\neq 2$ 的域，f 是指数$\geqslant 1$ 的厄米特(或对称)形式)的每一个自同构皆由 $U_n^+(K,f)$

的一个自同构誘导出来.

至于 $U_2^+(K,f)(J\neq 1)$ 的自同构，其中 f 是指数 1 的形式，我們可以利用这个羣与 $SL_2(K_0)$（K_0 是 J 的不变域）之間的同构（第二章 § 4 及 § 5），以及 § 2 的結果把它决定出来；从这个結果容易决定，当 f 是指数 1 的形式时 $U_2(K,f)$ $(J\neq 1)$ 的自同构，因为这时 $U_2^+(K,f)$ 是 $U_2(K,f)$ 的換位子羣. 当 f 的指数等于 0 时，$U_2^+(K,f)$ 的自同构还未能决定.

当 $J\neq 1$ 而 K 是特征数 $\neq 2$ 的无限域时，羣 $U_4^+(K,f)$ 的自同构还沒有决定出来. 当 f 的指数等于 0 时，羣 $O_4^+(K,f)$ 的自同构也沒有决定出来.

然而，当 f 的指数等于 2 时，可以决定出 $O_4^+(K,f)$ 的自同构. 实际上，我們已知（第二章 § 9）可以把 $O_4^+(K,f)$ 中的变換与 K 上 2 級矩陣的变換 $X\to U\times V$ 視为同一，其中 U 和 V 是两个可逆矩陣而且 $\det(U)\det(V)=1$（形式 $f(x,x)$ 与 X 的行列式視为同一）；因此 $O_4^+(K,f)$ 的換位子羣与上面使得 $\det(U)$ 为 K 中平方元素的变換所組成的羣視为同一. 再者 O_4^+ 中同一个变換对应于一切矩陣偶 $(\lambda U,\lambda^{-1}V)$，其中 $\lambda\neq 0$，因此 Ω_4 也可以与矩陣偶 (U,V) 所組成的羣視为同一，其中 $\det(U)=\det(V)=1$，而只相差一个符号的两个矩陣偶給出 Ω_4 中同一元素. 如果 G_1（或 G_2）是由矩陣偶 (U,I)（或 (I,V)）所組成的 Ω_4 的子羣，其中 U（或 V）是么模矩陣，则 G_1 与 G_2 相交換，$G_1\cap G_2$ 是 Ω_4（以及是 O_4）的中核 S，S 只含两个元素，而 G_1 和 G_2 都与 $SL_2(K)$ 同构，因此 Ω_4 与商羣 $(G_1\times G_2)/S$ 同构（但不与 S 及两个与 $PSL_2(K)$ 同构的羣的直乘积同构）. G_1（或 G_2）也可以解释作 O_4 中将迷向平面的集合对于旋轉羣所成的两个传递类中之一的一切迷向平面都保持不变的那些变換所組成的子羣（見第二章 § 6 及第三章 § 4）；对于 O_4 的每一个对称 s，我們有 $sG_1s^{-1}=G_2$.

假定 K 有二个以上的元素，那么羣 $SL_2(K)$ 不包含异于 S 的眞正規子羣（第二章 § 2）；由此立刻推出，G_1, G_2 和 S 是 Ω_4 所仅有的眞正規子羣. O_4^+ 的每一个自同构 φ 都将 G_1 和 G_2（整体地）保持

不变或将它們互换，但使φ承受O_4的一个由一个对称所引起的內自同构之后，我們可以假定φ是G_1的一个自同构，也是G_2的一个自同构.

我們注意，对于K的每一个自同构σ和每一个2級可逆矩陣A，映射$X\to AX^\sigma A^{-1}$可以与$\Gamma O_4(K,f)$中的一个半类似变换g(它将$\det X$映到$(\det X)^\sigma$)視为同一. 根据$SL_2(K)$的自同构的形状(§2)看出，使φ承受$u\to gug^{-1}$这样的自同构之后，所得到的自同构将G_2中元素全都保持不变. 因此可以局限于研究最后这个情形；另一方面，研究K的一个自同构τ和从K^*到它自己之中的一个映射θ使得$(\theta(\xi))^2=\xi^{1-\tau}$对一切$\xi\in K^*$. 我們如下定义$O_4^+$的一个自同构：令每一个矩陣偶$(U,V)$(使得$(\det U)(\det V)=1$者)与矩陣偶$(\theta(\det U)U^\tau, V)=(U_1,V_1)$相应，那么$(\lambda U,\lambda^{-1}V)$与$(\lambda U_1,\lambda^{-1}V_1)$相应，因此这个映射誘导出$O_4^+$的一个自同构，它在$G_2$上化为单位映射而在与$SL_2(K)$視为同一的$G_1$上与映射$U\to U^\tau$一致. 于是根据$SL_2(K)$的自同构的决定(§2)可以决定一个自同构$\tau$，使得$\varphi$承受上面形式的一个自同构以及$G_1$的一个內自同构之后，得到$O_4^+$的一个自同构，它将$G_1$和$G_2$中的元素都保持不变. 最后还需要决定$O_4^+$的这种自同构；这种自同构将$\Omega_4$中元素都保持不变而$O_4^+$中任一元素$u$的平方都属于$\Omega_4$(第二章§6)；因此所研究的这种类型的自同构的形状一定是$u\to\chi_0(u)u$，其中χ_0是从O_4^+到它的中核S的一个同态，这样就完成了O_4^+的全部自同构的决定(L. K. Hua[9]).

一个相似的、但更簡单的推理方法可以应用到当f的指数是1时，羣$O_4^+(K,f)$上去. 实际上，$O_4^+(K,f)$的换位子羣$\Omega_4(K,f)$与羣$PSL_2(K(\sqrt{\Delta}))$同构(Δ是f的判别式；見第二章§9). 利用后面这个羣的自同构的决定(見§6)，我們容易看出$\Omega_4(K,f)$的每一个自同构在这个情形都由$O_4(K,f)$的一个自同构誘导出来；再利用O_4^+中元素的平方都在Ω_4中这件事实就可以推出$O_4^+(K,f)$的每一个自同构都是由$O_4(K,f)$的一个自同构誘导出来的.

除了上面两种情形之外，当K是无限域时，换位子羣$\Omega_n(K,f)$

的自同构还沒有决定(見§7).

§6. 羣 $PGL_n(K)$, $PSL_n(K)$, $PSp_{2m}(K)$ 的自同构

将前面的方法应用到射影羣的主要困难是在这些羣里出現了不是从 $GL_n(K)$ 的对合,而是从 $GL_n(K)$ 的半对合过渡到商羣之后得到的对合(第一章§3). 因此需要利用只包含羣构造的性質将"第二类"对合与来自 $GL_n(K)$ 中对合的那些对合区别开来.

首先研究射影羣 $PGL_n(K)$, 其中 $n \geqslant 3$ 而 K 的特征数 $\neq 2$. 这时我們可以在这个羣里将极对合(它們来自 $GL_n(K)$ 中的极对合)与其余的对合用§1中所指出的第一种方法区别开来, 即用考察互相交換的共軛对合的极大集区别开来, 除了 $n=4$ 而 -1 不是 K 中平方元素这个情形(J. Dieudonné[7]);在后面这个情形,为要将极对合与第二类对合区别开来,我們注意,如果 u, v, u', v' 是四个两两共軛的第二类对合(对应于 K 中一个非平方元素 γ),而 u 和 v 交换, u' 和 v' 交換,則乘积 uv 和 $u'v'$ 不一定在 $PGL_n(K)$ 中共軛. 这样, §1 中的方法不需要作任何修改就可以应用到极对合上来, 于是証明了 $PGL_n(K)$ 的每一个自同构都是从 $GL_n(K)$ 的一个自同构过渡到商羣所誘导出来的. 这个結果当 $n=2$ 而 K 的特征数 $\neq 2$ 时仍然成立. 华罗庚[9]用同他决定 $GL_2(K)$ 的自同构的方法相同的方法証明了这一点.

当 K 的特征数为 2 时,注意 $PGL_n(K)$ 中任意两个互相交換而且共軛的第二类对合 u, v 的乘积 uv 永远不与 u 共軛,而 $GL_n(K)$ 中的对合却不可能如此,因此就将 $PGL_n(K)$ 中第二类对合与 $GL_n(K)$ 的对合区别开了. 这样, §1 的方法就可应用,因之上面所宣布的結果仍然成立.

同样的方法也可以应用到 $PSL_2(K)$ 上去, 除非 n 是偶数, K 的特征数 $\neq 2$ 而 -1 不属于 K 的换位子羣(J. Dieudonné[7], 19 頁). 在后面这个情形, 要区别 2-对合与第二类对合可以利用它們在 $PSL_n(K)$ 中的中心化子 (第一章§4)的性質. 然后§2中所用的方法就可以应用于这个情形, 而結論仍然是在 $SL_n(K)$ 的

自同构已知的每一个情形，$PSL_n(K)$ 的自同构可以将 $SL_n(K)$ 的自同构过渡到商羣而得到.

最后，对于射影辛羣 $PSp_{2m}(K)$，同样的結論也成立；这时仍然需要将极对合与第二类对合区别开，这只要研究它們的中心化子即可(見第一章 § 13 和 § 14 及 J. Dieudonné[7]，32—34 頁).

§ 7. 羣 $PU_n(K,f)$，$PU_n^+(K,f)$ 及 $P\Omega_n(K,f)$ 的自同构

在决定 $PU_n(K,f)$ 的自同构时，关于第二类对合，同样困难也会出現. 但这时如果对 K 或 f 不作任何假設，§6 中的方法就不再能应用. 然而，瓦尔特(J. Walter[1])最近只在 K 是特征数 $\neq 2$ 的(交换或不交换的)体，含多于三个元素以及 $n=5$ 或 $n\geqslant 7$ 这些假設下，决定了 $PU_n(K,f)$ 的自同构；在这些假設下，$PU_n(K,f)$ 的每一个自同构皆由 $U_n(K,f)$ 的一个自同构誘导出来. ($U_n(K,f)$的自同构在 §4中已經决定出来了). 証明的主要点是将 $PU_n(K,f)$中的极对合与这个羣里其余的对合区別开；一旦达到这一点，§4 的方法不需要任何本質的修改就可以应用. 瓦尔特(J. Walter)的方法是黎卡特的方法(§1)的发展，首先是研究对于 $PU_n(K,f)$ 中任意一个对合 $\bar{u}$，$\nu(\bar{u})$这个数. 这时发生困难是因为有 $\nu(\bar{u})=4$ 对于极对合以及 $\nu(\bar{u})>4$ 对于来自 $U_n(K,f)$ 中一个对合的非极对合，可是可能有$\nu(\bar{u})=4$对于某些第二类对合. 于是瓦尔特研究了 $PU_n(K,f)$ 中使得 $\nu(\bar{u})=4$ 的那些对合 $\bar{u}$ 所組成的集合 $\overline{M}$；对于 $\overline{M}$ 中任意三个不相同的而且两两交換的对合 $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$，以 $\omega(\bar{u},\bar{v},\bar{w})$ 表 $c(c(\bar{u},\bar{v},\bar{w}))$ 中元素个数（符号 $c(S)$ 具有 §1 中的同样意义，但是是在羣 $PU_n(K,f)$中考虑)，最后，以 $\omega(\bar{u})$表当 $\bar{v}$ 和 $\bar{w}$ 在适合上述条件下变动时，$\omega(\bar{u},\bar{v},\bar{w})$的极大值. 仔細研究了集合 $\overline{M}$之后(基于第一章 §13 和 § 14 的結果)，瓦尔特証明了 $\omega(\bar{u})=8$ 这个关系式就将极对合从集合 $\overline{M}$ 的元素中刻划出来，除非 $n=8$ 和 $n=12$；而这两种情形需要用特殊方法来处理（見上面所引的文献).

在这之前，狄多涅(J. Dieudonné[7]，55—57 頁)已經决定了 $PO_n(K,f)$ 的自同构，其中 f 是指数 $\geqslant 1$ 的对称形式，但 n 可以是任意 $\geqslant 3$ 的整数，而 K 是特征数 $\neq 2$ 的任意域；当 n 是奇数时，$PO_n(K,f)$ 与 $O_n^+(K,f)$ 同构而 $O_n^+(K,f)$ 的自同构在 §5 里已經决定出来了；当 n 是偶数时，所用的方法是利用非极对合与它的超平面包含迷向向量的极对合的中心化子的性質区别开来. 这个区别是很容易的，只要研究这些中心化子的换位子羣并利用 $O_n(K,f)$ 中任何元素的平方都属于它的换位子羣这件事实就行了. 最后的結果仍然是 $PO_n(K,f)$ 的自同构都是由 $O_n(K,f)$ 的自同构誘导出来的.

当 $n=6$ 或 n 是 $\geqslant 10$ 的偶数，而 f 是指数 $\geqslant 1$ 的对称形式时，羣 $PO_n^+(K,f)$ 的自同构也用类似的方法决定出来了 (J. Dieudonné[7]，57—60 頁). 这时仍然需要証明 $PO_n^+(K,f)$ 中一个 2-对合 $\bar{u}$ 的中心化子，当 u 的 $n-2$ 維特征子空間包含迷向直綫时，不能和第二类对合的中心化子同构. 要証明这一点，只要考察这两个羣里**交换对合的极大集**并証明这两个集中元素个数不同就行了. 在所考虑的情形，$PO_n^+(K,f)$ 的自同构仍然是由 $O_n^+(K,f)$ 的自同构誘导出来的 (而后者的自同构在对 f 有相同的假設下，在 §5 中已經决定了).

当 $n=4$ 而 f 的指数 $\geqslant 1$ 时 (除了 $K=\mathbf{F}_3$ 而 f 的指数 $=2$ 可能是例外)，同样結論仍然成立，这只要象 §5 一样来証明并考虑羣 $O_4^+(K,f)$ 的特殊构造就行了.

当 $n=8$ 时，有例外現象发生. 实际上，如果 f 的指数 $\geqslant 1$ 而在 E 中存在一組基使得对于这組基 $f(x,x)=\sum_{i=1}^{8}\xi_i^2$，那么"检驗性(Trialité)"理論(見 E. Cartan[2] 及 C. Chevalley[1])指出存在 $PO_8^+(K,f)$ 的自同构，将 2-对合映到第二类对合. 然而这种現象在对于 f 的规范正交基不存在时，不会发生；在这种情形，$PO_8^+(K,f)$ 的自同构仍然由 $O_8^+(K,f)$ 的自同构誘导出来 (J. Dieudonné[7]，60 頁).

似乎是混用区别 $PO_n^+(K, f)$ 中第二类对合与2-对合的方法以及区别 $U_n^+(K,f)$ 中 $(2, n-2)$ 型或 $(n-2, 2)$ 型对合与其余对合的方法(§5),我們可以决定出 $PU_n^+(K, f)$ 的自同构来，其中 f 的指数 $\geqslant 1$, $J \neq 1$, 而K是特征数 $\neq 2$ 的任意域. 但是到目前为止，只对于有限域K做到了这一点；这时区别各种对合是很容易的,因为只要証明它們的中心化子的阶不相等就行了. 于是証明了,对于特征数 $\neq 2$ 的任何有限域 K,当 $n \geqslant 3$ 而 $n \neq 4$ 时, $PU_n^+(K)$ 的自同构除了 $PU_3^+(\mathbf{F}_9)$ 和 $PU_3^+(\mathbf{F}_{25})$ 这两个羣可能是例外,都是由 $U_n^+(K)$ 的自同构誘导出来的(J. Dieudonné[7],82—84頁). 这个断言沒有包括的 $n=2$ 和 $n=4$ 两种情形可以化为决定其余有限典型羣的自同构的問題，即决定 $PSL_2(K_0)$ 和 $P\Omega_6(K_0, f)$ (K_0是K中J的不变子域) 两个羣的自同构問題 (見§8);前者在 §6 中已經决定了,而后者将在下面决定出来.

当K是特征数 $=2$ 的有限域而 $n \geqslant 3$ 时，除了 $PU_3^+(\mathbf{F}_4)$ 之外,我們也可以决定 $PU_n^+(K,f)$ 的自同构(J. Dieudonné[7],84—88頁). 这时仍然要区别酉平延与其余的对合，只要計算它們的中心化子的阶就行了；将酉平延区别出来之后，从 $PU_n^+(K)$ 的一个自同构出发，我們就得到从迷向直綫的集合到它自身之上的一个一一映射 ψ, 而 ψ 将两条正交的直綫映到两条正交的直綫. 还需要将ψ拓展到E中全部直綫的集合上，使得可以象通常一样应用射影几何的基本定理;为此我們采用馬凱的"极小偶"方法的一个略为改变的形式；首先我們証明 ψ 可以拓展成从非迷向平面的集合到它自身之上的一个一一映射,然后再証明,如果两个平面 P_1, P_2 有一条公共直綫,那么 $\psi(P_1)$ 和 $\psi(P_2)$ 也有一条公共直綫,最后再証明包含同一条直綫D的非迷向平面的集合在ψ之下映到包含同一条直綫 $\psi(D)$ 的非迷向平面的集合. 这时, $n=2$ 这个情形仍然化为决定 $PSL_2(K_0)$ 的自同构的問題，而它的自同构早已知道了(§8和§6).

我們再指出，一般說来，当 K 是无限域时，我們并不知道羣 $\Omega_n(K,f)$ 的自同构(然而可以看 J. Dieudonné[9], 91—92 頁上的

一个特殊情形）．可是，当K是特征数$\neq 2$的有限域时，我們可以决定羣$P\Omega_n(K,f)$的自同构．所用的方法（当$n \geqslant 6$而$n \neq 8$时）与上面所討論的几个情形有相同的性質，即基于旋子范数（第二章§8），可以給出O_n中屬于Ω_n的对合的充要条件；另一方面，只要計算各种对合在$P\Omega_n$中的中心化子的阶就可以将它們区别开来．于是我們得到結論：在所考虑的情形，$P\Omega_n(K,f)$的自同构都是由$O_n(K,f)$的一个自同构誘导出来的（J. Dieudonné[7]，61—65頁）．当$n=8$时，如果f的判別式不是一个平方元素，那么$P\Omega_8(K,f)$的自同构仍然是这种类型的；而在相反的情形，这种类型的自同构組成$P\Omega_8(K,f)$的全部自同构的羣的一个指数3的正规子羣．当$3 \leqslant n \leqslant 5$时，我們可以将决定$P\Omega_n(K,f)$的自同构的問題化为决定$PSL_m(K)$和$PSp_q(K)$的自同构的問題（見§8），而它們的自同构都已經决定了．

最后，当K是特征数$=2$的有限域，而n是$\geqslant 10$的偶数时，我們可以决定$P\Omega_n(K,Q)$的自同构．这时我們有$\Omega_n = P\Omega_n$，因此沒有第二类对合；可是正交平延不屬于Ω_n，因而需要研究2-对合．我們証明有两类2-对合，一类（“乘积类”）是由两个互相交換的平延的乘积組成的；我們仍然利用对合的中心化子的构造将这类对合刻划出来．然后需要在“乘积类”里的两个互相交換的2-对合所組成的偶(u,v)之中区别出“正則交換”的来，所謂u和v“正則交換”，就是說u和v的2維子空間有一个1維的交；而这个情形由乘积uv不是一个2-对合这件事实所刻划．最后，变化“极小偶”的方法就可以証明$P\Omega_n(K,f)$的一个自同构将“乘积类”里其2維子空間有一条公共直綫的2-对合的集合映到同样性質的一个集合；因此我們可以应用射影几何的基本定理，从而推出$\Omega_n(K,f)$的每一个自同构的形狀都是$u \to gug^{-1}$，其中g屬于$\Gamma O_n(K,f)$（J. Dieudonné[7]，65—70頁）．$n=4$和$n=6$两种情形仍然可以化为决定形狀$PSL_4(K_1)$，$PU_4^+(K_1)$或$PSL_2(K_1)$的羣的自同构問題（見§8），其中K_1是一个特征数$=2$的有限域，而在上面这些羣自同构都已經决定了；然而我們并不知道羣$P\Omega_8(K,Q)$的自同构．

§8. 典型羣的同构

一个典型羣 $G(n,K,f)$ 依賴于一个体 K,一个整数 n (羣所作用的空間的維数), 以及一个已知指数的半双綫性形式 (或二次形式 Q); 我們說, 从 $G(n, K, f)$ 到 $G'(n', K', f')$ 上的一个同构是一般同构,如果在它的定义中不出現体 K 的特殊构造(除 K 可能是交换的之外),因而如果将任意一个体 K (可能是交换的)代入,就得到相应的羣的一个同构(K' 自然依賴于 K). 在其余情形,我們說是例外同构.

我們已經碰到过一般同构, 例如, 从 $Sp_2(K)$ 到 $SL_2(K)$ 上的同构而 K 是任意域,以及从 $U_2^+(K, f)$ 到 $SL_2(K_0)$ 上的同构,其中 K 是域, $J \neq 1$, f 的指数是 1, 而 K_0 是 J 的不变子域 (第二章 §4 和 §5). 其余一切已知的一般同构 (在第二章 §9 中研究羣 O_3 和 O_4 时已經遇到了一些), 按照范德威尔登 (B. L. van der Waerden[1], 18—28 頁)所系統发展的一个方法,可以与其中唯一的一个联系起来.

这个方法的出发点如下:首先設 K 的特征数 $\neq 2$, F 是空間 K^4, E 是 F 上 6 維的双向量空間;如果$(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ 是 F 的一組基,那么 $e_i \wedge e_j (i<j)$ 就組成 E 的一組基,而两个双向量 x, y 的外乘积可以写作 $x\wedge y = f(x, y)e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4$,其中純量积 $f(x,y)$ 是 E 上的一个非退化的指数等于 3 的对称双綫性形式. 关系式 $f(x,x)=0$ 表明 x 是一个 (对应于 F 的一个 2 維子空間的) 可分解双向量; 因此我們可以将格拉斯曼空間 $G_1(F)$ 看作是 $P(E)$ 中由方程 $f(x,x)=0$ (一个 5 維空間中的"二次曲面")所定义的点集. 这样, 設 v 是一个从 F 到它自身之上的半綫性映射, u 是 v 的第二外乘冪 $v^{(2)}$,换言之,是从 E 到它自身之上的半綫性映射使得 $u(s\wedge t)=v(s)\wedge v(t)$ 对任意两个向量 s, t. 我們立刻有 $f(u(x), u(y))=(\det v)(f(x, y))^\sigma$,如果 σ 是 v 的自同构;换言之, u 是对于形式 f 的一个半类似变换. 反之,如果 u 是这样一个半类似变换,那么对应的射影变换 $\bar{u}$ 将 $G_1(F)$ 映到它自身;因为 $G_1(F)$ 中两个"相粘切"

(在第一章 §2 的意义下)的元素是那样的两个元素使得 $P(E)$ 中連接它們的直綫都包含在 $G_1(F)$ 中，所以 $\bar{u}$ 和 $\bar{u}^{-1}$ 都将两个相粘切的元素映到两个相粘切的元素. 因此我們可以应用周煒良的定理(第三章 §2):如果 u 不将二次曲面 $G_1(F)$ 上两个平面类 $N_2^+(E)$, $N_2^-(E)$ 互变，那就存在一个从 F 到它自身之上的半綫性映射 v 使得 $v^{(2)}u^{-1}$ 将 $P(E)$ 中的点都保持不变,因而是一个位似变换. 换言之,我們有 $u=\mu\cdot v^{(2)}$, 其中 $\mu\in K^*$; 此外,我們毫无困难地可以驗証关系式 $\mu\cdot v^{(2)}=\mu_1\cdot v_1^{(2)}$ 蘊涵 $v_1=\lambda v$ 及 $\mu=\lambda^2\mu_1$ $(\lambda\in K^*)$. 如果反之, μ 将 $N_2^+(E)$ 和 $N_2^-(E)$ 互换, u 就是从 F 到 F^* 之上的一个半綫性映射(换言之, F 的一个对射变换)的第二外乘冪与从 F^* 上的双向量空間到 F 上的双向量空間之上的自然映射(除一因子外,唯一确定)的乘积. 当 v 是綫性映射时, u 就是对于 f 的一个直接类似变换,而且反之亦然;于是我們看到定义 3 个从直乘积 $K^*\times GL_4(K)$ 到对于形式 f 的直接类似变换所組成的羣 $GO_6^+(K,f)$ 上的一个同态 $(\mu,v)\to\mu v^{(2)}$,这个同态的核是由元素 (λ^2,λ^{-1}) 所組成的一个子羣，其中 $\lambda\in K$; 此外, $\mu v^{(2)}$ 的乘子是 $\mu^2\det(v)$. 再者, E 上一切指数 3 的非退化对称双綫性形式都与 f 等价(第一章 § 11)，因此我們得到一个对于这些形式的正交羣的一般同构.

从这一点出发,范德威尔登的方法依賴于下面的两个注意. 1° 如果 f 是 K 上 n 維向量空間 E 上的一个非退化的对称双綫性形式, H 是 E 中的一个非迷向超平面, f_1 是 f 在 H 上的限制，那么羣 $O_{n-1}^+(K,f_1)$ 就是 $O_n^+(K,f)$ 或 $GO_n^+(K,f)$ 中将一个綫性形式 u 保持不变的元素所組成的子羣,而 u 使得 $u(x)=0$ 是 H 的方程; 2° 如果 K_1 是 K 的一个子域使得 $[K:K_1]=2$ 而 σ 是 K 在 K_1 上异于单位的那个自同构，那么羣 $GO_n^+(K_1,f)$ 就是 $GO_n^+(K,f)$ 中与 $\Gamma O_n(K,f)$ 中半对合 $(\xi_i)\to(\xi_i^\sigma)$ (ξ_i 是 E 中一点对于任意一个基底的坐标)交换的变换所組成的子羣. 于是, E 上任意一个非退化的对称双綫性形式,只要将域 K 用一个从 K 陆續經若干个二次扩张而得到的 K 的一个扩张来代替,就可以变成一个最大指数的形式.

因此我們看到，对于每个羣 O_n^+（其中 $n \leqslant 6$），只要将上面的条件翻譯成在上面所描写的同构下与 $GO_6^+(K, f)$（f 的指数为 3）同构的 $K^* \times GL_4(K)$ 的商羣上的条件，就可以得到一个自然同构。

这样，对于 $3 \leqslant n \leqslant 6$，我們得到羣 O_n^+ 的 18 个一般同构，其中一部分已由 B. L. 范德威尔登（van der Waerden[1]，18—28 頁，在那里可以找到这个問題的过去工作的文献）举出，而由狄多涅(J. Dieudonné[14]，200—225 頁)把剩下的完全举了出来；此外这个方法需要利用第一章 §15 中所叙述的一般步驟。我們不拟重述第二章 §9 中所叙述过的关于羣 O_3^+ 和 O_4^+ 的同构；此地只局限于举出我們所得到的单羣（因此是对应于指数 $\geqslant 1$ 的形式的 5 維和 6 維正交羣）的一般同构：

I. $n = 6$. 如果对称形式 f 的指数等于 3，那么单羣 $P\Omega_6(K, f)$ 与单羣 $PSL_4(K)$ 同构。

如果 f 的指数等于 2，$P\Omega_6(K, f)$ 就与单羣 $PU_4^+(K(\sqrt{-\Delta}), g)$ 同构，其中 Δ 是 f 的判別式而 g 是一个指数 2 的厄米特形式。

如果 f 的指数等于 1 而 $-\Delta$ 是一个平方元素，$P\Omega_6(K, f)$ 就与单羣 $PSL_2(K_1)$ 同构，其中 K_1 是 K 上的广义四元数体。

如果 f 的指数等于 1 而 $-\Delta$ 不是一个平方元素，$P\Omega_6(K, f)$ 就与羣 $T_2(L, g)/W_2$（第二章 §4 的符号）同构，其中 L 是体 $K(\sqrt{-\Delta})$ 上的广义四元数体，g 是一个对于第二类对合 J 的指数等于 1 的厄米特(或反厄米特)形式，而 J 在 $K(\sqrt{-\Delta})$ 上与这个域在 K 上的异于单位的那个自同构一致。

II. $n = 5$ 如果形式 f 的指数等于 2，单羣 $P\Omega_5(K, f)$ 就与辛羣 $PSp_4(K)$ 同构。

如果 f 的指数等于 1，单羣 $P\Omega_5(K, f)$ 就与羣 $T_2(L, g)/W_2$（第二章 §4 的符号）同构，其中 L 是 K 上的广义四元数体，g 是一个对于 L 中唯一的那个其不变元素的集合是中心 K 的对合的指数等于 1 的反厄米特形式。

这些結果中的某些可以象 3 維和 4 維的情形一样，靠研究克黎福特代数来得到(M. Eichler[2]，33—35 頁；及 C. Chevalley[1]

102—105 頁).

我們再在用这些方法所得到的自同构之中举出(在第二章 §9 中所沒有举出来的)正交羣 $O_3^+(K,f)$ 与直接酉类似变換 $GU_2^+(K_1,g)$ (其中 K_1 是 K 的一个二次扩张，而 g 是 K_1 上指数 0 的一个厄米特形式)对于位似变換羣的商羣之間的同构，其中 f 的指数是 0.

当 K 的特征数等于 2 时，我們仍然象上面一样得到一个从 $K^* \times GL_4(K)$ 到羣 $GO_6^+(K, Q)$ 上的同态，其中 Q 是一个指数 3 的无亏数的二次形式(第一章 § 16). 从这出发，范德威尔登的方法当 Q 的指数等于 2 时，仍然給出 $P\Omega_6(K, Q)$ 的同样的一般同构(这时 Δ 表 Q 的伪判别式(第二章 § 10))；$n = 6$ 而 Q 的指数 < 2 的情形还沒有研究. 我們提醒一下，羣 $\Omega_4(K,Q)$ 的一般同构曾在第二章 § 10 中研究过(此地只有 $n = 6$ 和 $n = 4$ 两种情形需要研究).

研究羣 $O_6^+(K, f)$ (f 的指数等于 3) 中的其它类型的半对合，可以用同样方法得到广义四元数体上酉羣的同构；如果 L 是这样一个体，J 是 L 的唯一的那个对合，其不变元素的集合是 L 的中心，我們可以証明，例如(采用第二章 §4 的符号)，如果 g 是 $E=L^3$ 上一个指数 1 的反厄米特形式，羣 $T_3(L, g)/W_3$ 就与单羣 $PU_4^+(K,f)$ 同构，其中 K 是包含在 L 中的 L 的中心的一个二次扩张，而 f 是 K^4 上指数 1 的一个反厄米特形式(J. Dieudonné[17]). 就用这个方法可以証明羣 $T_2(L, g)$ (g 是对于 J 的指数 1 的反厄米特形式)不是 $U_2(L,g)$ 的換位子羣以及羣 U_2/T_2 不能包含一个单羣作为一个正規羣列中的因子(見上面所引的文献).

除了刚才談的那些一般同构之外，我們还知道 $PSL_n(K)$, $PSp_{2m}(K)$, $PU_n^+(K)$ 三种类型的有限羣以及对称羣 $\mathfrak{S}_6$ 和交錯羣 $\mathfrak{A}_n$ 之間的一些例外同构. 这些同构是由約当 (C. Jordan)[1] 和狄克逊 (L. Dickson)[1] 所发現的，它們是:

1) 羣 $PSL_2(\mathbf{F}_2)$ 与对称羣 $\mathfrak{S}_3$ 同构;

2) 羣 $PSL_2(\mathbf{F}_3)$ 与交錯羣 $\mathfrak{A}_4$ 同构;

3) 羣 $PSL_2(\mathbf{F}_4)$ 和 $PSL_2(\mathbf{F}_5)$ 都与交錯羣 $\mathfrak{A}_5$ 同构;

4) 羣 $PSL_2(\mathbf{F}_7)$ 和 $PSL_3(\mathbf{F}_2)$ 是同构的 168 阶单羣;

5) 羣 $PSL_2(\mathbf{F}_9)$ 与交錯羣 $\mathfrak{A}_6$ 同构;

6) 羣 $PSL_4(\mathbf{F}_2)$ 与交錯羣 $\mathfrak{A}_8$ 同构;

7) 辛羣 $PSp_4(\mathbf{F}_2)$ 与对称羣 $\mathfrak{S}_6$ 同构;

8) 羣 $PSp_4(\mathbf{F}_3)$ 和 $PU_4^+(\mathbf{F}_4)$ 是同构的 25920 阶单羣.

前面提到的那些作者在証明上面这些同构所用的方法是对于所考察的有限羣找出一組适合某些条件的生成元素組,并証明在我們要証明它們同构的羣中适当选取这些元素可使它們的生成元素的个数相等而且适合同样的条件. 我們也可以用另外的方法得到这些例外同构,这个方法更接近于所考察的这些羣的几何来源(J. Dieudonné[18], W. L. Edge[1,2,3]).

§9. 典型羣的同构(續)

§8 中的結果自然会使人想到除了这一节里所举出的典型羣的(一般或特殊)同构之外,是不是还有其他的. 这个問題还沒有肯定地予以解决;我們举出截止目前为止已經得到的主要結果.

首先,羣 $PSL_n(K)$ 和 $PSL_m(K')$($n \geq 2, m \geq 2$)除了 $PSL_2(\mathbf{F}_7)$ 和 $PSL_3(\mathbf{F}_2)$ 两个羣是例外,只能在 $n = m$ 时同构;当 $n = m > 2$ 时,K 和 K' 应該同构或反同构. 而当 $n=m=2$ 时,除了 $K=\mathbf{F}_4$, $K' = \mathbf{F}_5$ 这个例外情形,也是这样的.

这个結果是分成几个阶段获得的. 首先施莱尔 (O. Schreier) 和范德威尔登 (B. L. van der Waerden)[1] 当 K 和 K' 是域时,証明了它,后来狄多涅 (J. Dieudonné[7], 22—25 頁及 [6] 91—94 頁)当 K 和 K' 任意时,除了几个情形沒有解决以外,証明了它;华罗庚和万哲先[1] 討論了这几个沒有解决的情形.

我們可以按照 K 和 K' 都有限或无限而分成两种情形来研究. 在第一种情形,施莱尔和范德威尔登的方法在于証明当 $n \geq 3$ 时,平延是 $PSL_n(K)$ 中除了单位元素之外其中心化子的阶最大的元素. 当 $n \geq 3$ 和 $m \geq 3$ 时, §1 中所講的决定 $GL_n(K)$ 的自同构的方法可以用来証明从 $PSL_n(K)$ 到 $PSL_m(K')$ 上的一个同

构决定一个从 K^n 到 K'^m(或其对偶)上的一个半綫性映射,由此即得結論. 还需要研究整数 n 和 m 之一等于 2 的情形;这时利用 $PSL_2(K)$(K 有限)中任意一个异于单位的元素的中心化子都是可解的这件事实,然后再研究所出現的有限羣的阶即可完成証明.

当 K 和 K' 都无限时,对于这个更一般的情形所用的方法依賴于研究所考察的羣中的对合. 首先,K 和 K' 的特征数应該都 $\neq 2$ 或都等于 2;这可由下面这件事实推出:如果 K 的特征数 $= 2$,那么 $PSL_n(K)$ 中就有两两交換而且共軛的对合的无限集,可是当 K 的特征数 $\neq 2$ 时却不是这样的. 先假定 K 和 K' 的特征数都 $\neq 2$,那么研究一下 $PSL_n(K)$ 中共軛而且交換的对合的极大集中元素的个数就可以証明一定有 $m = n$;对于 m 和 n 的小数值,需要一些补充推理来除去上面这个方法所不能討論的情形;最困难的 $n = 2$, $m = 3$ 这个情形是由华罗庚和万哲先証明的(見上面所引的文献). 一旦証明了 $m = n$,当 $m = n > 2$ 时 §6 的方法就可以用来証明 K 和 K' 同构或反同构.

如果 K 和 K' 的特征数等于 2,而且 $n \geqslant 6$,那么 $PSL_n(K)$ 中的平延可以用一个与 n 无关的性質来决定(§1 及 §6);从 $PSL_n(K)$ 到 $PSL_m(K')$ 上的每一个自同构,当 $n \geqslant 6$ 及 $m \geqslant 6$ 时,都将平延映到平延,由此即可推出結果. 如果 m, n 这两个数中有一个 <6,还需要用补充推理;最困难的两种情形,即对应于数偶 (2,3) 和 (4,5) 的情形,是由华罗庚和万哲先解决的(見上面所引的文献).

施萊尔(O. Schreier)和范德威尔頓 (B. L. van der Waerden)[1] 也証明了,除了 §8 中所举出的情形之外,不再有羣 $PSL_n(K)$ 与交錯羣 $\mathfrak{A}_r$ 同构;他們的方法是对 n 施行归納法,而利用 $PSL_n(K)$ (K 有限) 中元素的中心化子有一个組成羣鏈,其中的单因子与某些羣 $PSL_h(K')$ 同构,而 $h < n$.

至于辛羣,我們可以証明,羣 $PSp_{2m}(K)$ 与 $PSp_{2n}(K')$ 只能在 $m = n$ 而 K 与 K' 同构时同构,但是 $m = n = 1$, $K = \mathbf{F}_4$, $K' = \mathbf{F}_5$ 是一个例外情形(J. Dieudonné[7], 39—41 頁). 所用的方法与上面的方法类似,即研究所考察的羣之中的对合的中心化子.

另一方面，当 $m>1$ 时，沒有羣 $PSp_{2m}(K)$ 可以和形状 $PSL_n(K')$ 的一个羣或交錯羣 $\mathfrak{A}_r$ 同构（J. Dieudonné[7]，41—45 頁），其中 K' 是域；所用的方法也是类似的，即对 n 施行用归納法.

形状 $P\Omega_n(K,f)$ 或 $PU_n^+(K,f)$（K 交換）的典型羣与其它类型的典型羣之間可能的同构，一般說来还沒有决定出来. 然而我們能在 K 是有限域时研究这个問題；利用上面的結果和同样类型的方法（主要是基于研究对合的中心化子），最后达到結論，除了 §8 中所举出的（一般或例外）同构之外，

$$PSL_n(K),\ PSp_{2m}(K),\ P\Omega_q(K,f),\ PU_r^+(K),$$

$\mathfrak{S}_h$ 和 $\mathfrak{A}_h$ 这些类型的羣里任意两个有限羣之間都不再有其它的同构. 由此我們推出，除了 §8 中所举出的一般同构之外，对于 $P\Omega_n(K,f)$ 类型的羣（其中 f 的指数 $\geqslant[(n-2)/2]$）或 $PU_n^+(K,f)$ 类型的羣 $\left(\text{其中 } f \text{ 的指数是}\left[\frac{n}{2}\right]\right)$ 不再有其它的一般同构，因为取 K 为任意一个有限域，就可以将这样一个同构特殊化，使其成这些类型的有限羣的一个同构.

符号表

A. 书中采用的符号

ξ^σ（$\xi\in K$，σ 是K的自同构或从K到K'上的同构），A^σ（矩陣(α_{ij}^σ)，如果A是矩陣(α_{ij})）。

K^0（与K相逆的体），J（从K到K^0上的同构），ξ^J（$\xi\in K$），A^J（矩陣(α_{ij}^J)，如果$A=(\alpha_{ij})$）。

$\xi^{\sigma\tau}=(\xi^\sigma)^\tau$；$\xi^{\sigma J}=(\xi^\sigma)^J$，$\xi^{J\sigma}=(\xi^J)^\sigma$。

$\langle x',x\rangle=x'(x)$（$x$是向量空間$E$中的元素，$x'$是$E$的对偶$E^*$中的元素）。

${}^tu$，$\check{u}={}^tu^{-1}$（u是半綫性映射）：第一章§6。

${}^tA$（矩陣$A=(\alpha_{ij})$的轉置(α_{ji})）。

$f(x,y)$，f（半双綫性形式）：第一章§5。

V^0（V的正交子空間）：第一章§7。

ν（形式f的指数）：第一章§7。

$M(f)$（形式f的乘子羣）：第一章§9。

$\Gamma L_n(K)$，$GL_n(K)$，H_n，Z_n：第一章§1。

h_α（比值α的位似变换）：第一章§1。

$\bar{u}$（u是直射变换）：第一章§1。

$P(E)$，$P_{n-1}(K)$：第一章§1。

$P\Gamma L_n(K)$，$PGL_n(K)$：第一章§1。

$SL_n(K)$，$PSL_n(K)$：第二章§1。

$\Gamma U_n(K,f)$，$GU_n(K,f)$，$U_n^+(K,f)$，$U_n(K,A)$，$U_n(K)$：第一章§9。

$GU_n^+(K,f)$：第二章§13。

$U_n^+(K,f)$：第二章§5。

$T_n(K,f)$，W_n：第二章§4。

$P\Gamma U_n(K,f)$, $PGU_n(K,f)$, $PU_n(K,f)$: 第一章 § 9.

$PU_n^+(K,f)$: 第二章 § 5.

$\Gamma Sp_n(K)$, $GSp_n(K)$, $Sp_n(K)$: 第一章 § 9.

$P\Gamma Sp_n(K)$, $PGSp_n(K)$, $PSp_n(K)$: 第一章 § 9.

$\Gamma O_n(K,f)$, $GO_n(K,f)$, $O_n(K,f)$: 第一章 § 9.

$O_n^+(K,f)$, $\Omega_n(K,f)$: 第二章 § 6.

$O_n'(K,f)$: 第二章 § 7.

$P\Gamma O_n(K,f)$, $PGO_n(K,f)$, $PO_n(K,f)$: 第一章 § 9.

$PO_n^+(K,f)$, $P\Omega_n(K,f)$: 第二章 § 6.

$Q(x)$, Q (特征数 = 2 的域上的二次形式): 第一章 § 16.

$\Gamma O_n(K,Q)$, $GO_n(K,Q)$, $O_n(K,Q)$: 第一章 § 16.

$P\Gamma O_n(K,Q)$, $PGO_n(K,Q)$, $PO_n(K,Q)$: 第一章 § 16.

$O_n^+(K,Q)$, $O_n'(K,Q)$, $\Omega_n(K,Q)$: 第二章 § 10 及 § 11.

$\mathbf{F}_q$: q 个元素的有限域; **Q**: 有理数域; **R**: 实数域.

B. 书中某些部分所采用的特殊符号

U^+, U^- (一个对合的特征子空間): 第一章 § 3, § 4, § 14 及 § 15.

$B_{ij}(\lambda)$ (平延的矩陣): 第二章 § 1 及 § 2.

$C(f)$, $C^+(f)$, $C^-(f)$, e_H, J (克黎福特代数的对合), s_u, θ (旋子范数): 第二章 § 7.

$C(Q)$, $C^+(Q)$, s_u, $\mathfrak{p}(\rho)$: 第二章 § 10.

$G_r(E)$, $\bar{u}_r$, ω_r: 第三章 § 2.

$N_s(E)$: 第三章 § 3; $N_r^+(E)$, $N_r^-(E)$: 第三章 § 4.

$c(S)$, $v(u,v)$, $v(u)$: 第四章 § 1.

C. 狄克逊(L. E. Dickson)[1]的符号和范德威尔登(B. L. van der Waerden)[1]的符号

狄克逊	范德威尔登	狄多涅
	$GL(n,K)$	$GL_n(K)$
	$SL(n,K)$	$SL_n(K)$
	$PGL(n,K)$	$PGL_n(K)$
	$PSL(n,K)$	$PSL_n(K)$
$GF(q)$	$GF(q)$	$\mathbf{F}_q$
$GLH(n,q)$	$GL(n,q)$	$GL_n(\mathbf{F}_q)$
$SLH(n,q)$	$SL(n,q)$	$SL_n(\mathbf{F}_q)$
	$PGL(n,q)$	$PGL_n(\mathbf{F}_q)$
$LF(n,q)$	$PSL(n,q)$	$PSL_n(\mathbf{F}_q)$
	$C(2m,K)$	$Sp_{2m}(K)$
	$PC(2m,K)$	$PSp_{2m}(K)$
$SA(2m,q)$	$C(2m,q)$	$Sp_{2m}(\mathbf{F}_q)$
$A(2m,q)$	$PC(2m,q)$	$PSp_{2m}(\mathbf{F}_q)$
	$U(n,\mathbf{P},K),U(n,K)$	$U_n(K,f)$
	$SU(n,\mathbf{P},K),SU(n,K)$	$U_n^+(K,f)$
	$PSU(n,\mathbf{P},K),PSU(n,K)$	$PU_n^+(K,f)$
	(假定 f 有一組規范正交基；P 为 f 的不变子域，假定 K 交换)	
	$H(2m,\mathbf{P},K)$	$U_{2m}(K,f)$
	$SH(2m,\mathbf{P},K)$	$U_{2m}^+(K,f)$
	$PSH(2m,\mathbf{P},K)$	$PU_{2m}^+(K,f)$
	(假定 f 的指数为 m)	
	$U(n,q)$	$U_n(\mathbf{F}_q)$
	$SU(n,q)$	$U_n^+(\mathbf{F}_q)$
$HO(n,q)$	$PSU(n,q)$	$PU_n^+(\mathbf{F}_q)$
$HA(2m,q)$		$PU_{2m}^+(\mathbf{F}_q)$
	$O(n,K,Q)$	$O_n^+(K,f)$
	(K 的特征数 $\neq 2$, $Q(x)=f(x,x)$)	
	$PO(n,K,Q)$	$PO_n^+(K,f)$
	(K 的特征数 $\neq 2$, $Q(x)=f(x,x)$)	
	$O_1(n,K)$	$O_n^+(K,f)$
	$PO_1(n,K)$	$PO_n^+(K,f)$
	(K 的特征数 $\neq 2$, f 有一組規范正交基)	
	$O_D(n,q)$	$O_n^+(\mathbf{F}_q,f)$
	(q 被 2 除不尽，D 是 f 的判别式)	

(續)

狄克逊	范德威尔登	狄多涅
	$O'_D(n,q)$	$\Omega_n(\mathbf{F}_q,f)$
	(q被2除不尽，D是f的判别式)	
$FO(n,q)$	$PO'_1(n,q)$	$P\Omega_n(\mathbf{F}_q,f)$
	(f的判别式是$\mathbf{F}_q$中的一个平方元素)	
$SO(n,q)$	$PO'_\nu(n,q)$	$P\Omega_n(\mathbf{F}_q,f)$
	(f的判别式ν不是$\mathbf{F}_q$中的平方元素)	
	$O(n,K,Q)$	$O_n(K,Q)$
	(K是特征数 $=2$ 的完备域)	
	$J_\lambda(2m,K)$	$O^+_{2m}(K,Q)$
	(K是特征数 $=2$ 的完备域，λ^2是Q的伪判别式)	
$FH(2m,q)$	$J_0(2m,q)$	$\Omega_{2m}(\mathbf{F}_q,Q)$
	(Q的指数为m)	
$SH(2m,q)$	$J_\lambda(2m,q)$	$\Omega_{2m}(\mathbf{F}_q,Q)$
	($\lambda\neq 0$，Q的指数为$m-1$)	

我們指出，有些作者用 $SO(n,K,Q)$ 表 $O^+_n(K,f)$（而 $Q(x)=f(x,x)$），而当 f 有規范正交基时，簡記作 $SO(n,K)$。

定义和主要定理索引

参 考 文 献

本文献目录中收集的1935以前的文献远不是完全的;关于1935以前的文献,讀者可以在范德威尔頓 (B. L. van der Waerden)[1] 的书中找到.

Abe, M.: [1] Projective transformation groups over non-commutative fields, Sijo-Sugaku-Danwakai, 240 (1942).

Albert, A. A.: [1] Symmetric and alternate matrices in an arbitrary field, I. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 386—436 (1938).

Ancochea, G.: [1] Le théorème de von Staudt en géométrie projective quaternionienne. J. reine angew. Math. **184**, 193—198 (1942).

Arf, C.: [1] Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2, I. J. reine angew. Math. **183**, 148—167 (1941).

Asano, K., u. T. Nakayama: [1] Über halblineare Transformationen. Math. Ann. **115**, 87—114 (1937).

Bachmann, F.: [1] Eine Kennzeichnung der Gruppe der gebrochen-linearen Transformationen. Math. Ann. **126**, 79—92 (1953).

Baer, R.: [1] Free mobility and orthogonality. Trans. Amer. Math. Soc. **68**, 439—460 (1951); [2] The group of motions of a two-dimensional elliptic geometry. Comp. Math. **9**, 271—288 (1951); [3] Linear algebra and projective geometry. New York: Acad. Press 1952.

Birkhoff, G., and J. von Neumann: [1] The logic of quantum mechanics. Ann. of Math. **37**, 823—843 (1936).

Bourbaki, N.: [1] Algèbre, chap. II: Algèbre linéaire. Actual. Scient. et Ind., n° 1032. Paris: Hermann 1947; [2] Algèbre, chap. VII: Modules sur les anneaux principaux. Actual. Scient. et Ind., n° 1179, Paris: Hermann 1952.

Brenner, J.: [1] The linear homogeneous group. Ann. of Math. **39**, 472—493 (1938); [2] The linear homogeneous group, II. Ann. of Math. **45**, 100—109 (1944).

Cartan, E.: [1] Leçons sur la géométrie projective complexe. Paris: Gauthier-Villars 1931; [2] Leçons sur la théorie des spineurs, vol. II. Actual. Scient. et Ind., n° 701. Paris: Hermann 1938.

Chevalley, C.: [1] The algebraic theory of spinors. New York: Columbia Univ. Press 1954; [2] Théorie des groupes de Lie, t. II: Groupes algébriques. Actual. Scient. et Ind., n° 1152. Paris: Hermann 1951. [3] Sur le groupe exceptionnel (E_6). C. r. Acad. Sci. (Paris) **232**, 1991—1993 (1951); [4] Sur une variété algébrique liée à l'étude du groupe (E_6). C. r. Acad. Sci. (Paris) **232**, 2168—2170 (1951); [5] Mémoire sur les groupes simples, à paraître au Tohoku Math. J. (1955).

周煒良: [1] On the geometry of algebraic homogeneous spaces. Ann. of

Math. **50**, 32—67 (1949).

Clifford, W. K.: [1] Applications of Grassmann's extensive algebra. Math. Papers, p. 266—276. London: Macmillan 1882; [2] On the classification of geometric algebras. Math. Papers, p. 397—401. London: Macmillan 1882.

Dickson, L. E.: [1] Linear groups. Leipzig: B. G. Teubner 1901; [2] Theory of linear groups in an arbitrary field. Trans. Amer. Math. Soc. **2**, 363—394 (1901); [3] Linear groups in an infinite field. Proc. Lond. Math. Soc. **34**, 185—205 (1902).

Dieudonné, J.: [1] Les déterminants sur un corps non commutatif. Bull. Soc. Math. France **71**, 27—45 (1943); [2] Compléments à trois articles antérieurs. Bull. Soc. Math. France **74**, 59—68 (1946); [3] Sur la réduction canonique des couples de matrices. Bull. Soc. Math. France **74**, 130—146 (1946); [4] Sur les groupes classiques. Actual. Scient. et Ind., n° 1040. Paris: Hermann 1948; [5] Sur une généralisation du groupe orthogonal à quatre variables. Arch. d. Math. **1**, 282—287 (1949); [6] Sur les systèmes maximaux d'involutions conjuguées et permutables dans les groupes projectifs. Summa Bras. Math. **2**, 59—94 (1950); [7] On the automorphisms of the classical groups. Memoirs Amer. Math. Soc. n° 2, 1—95 (1951); [8] Algebraic homogeneous spaces over fields of characteristic two. Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 295—304 (1951); [9] On the orthogonal groups over the rational field. Ann. of Math. **54**, 85—93 (1951); [10] Orthogonal and unitary groups over the rational field. Amer. J. Math. **73**, 940—948 (1951); [11] Sur les groupes orthogonaux rationnels à trois et quatre variables. C. r. Acad. Sci. (Paris) **233**, 541—543 (1951); [12] On the orthogonal groups over an algebraic number field. Proc. Lond. Math. Soc. (3), **2**, 245—256 (1952); [13] On the structure of unitary groups. Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 367—385 (1952); [14] Les extensions quadratiques des corps non commutatifs et leurs applications. Acta Math. **87**, 175—242 (1952); [15] A problem of Hurwitz and Newman. Duke Math. J. **20**, 381—390 (1953); [16] On the structure of unitary groups (II). Amer. J. Math. **75**, 665—678 (1953); [17] Sur les groupes unitaires quaternioniques à deux et à trois variables. Bull. Sci. Math. **77**, 195—213 (1953); [18] Les isomorphismes exceptionnels entre les groupes classiques finis. Canad. J. of Math. **6**, 305—315. (1954); [19] Sur les générateurs des groupes classiques. Summa Bras. Math. 3, (1955); [20] Pseudodiscriminant and Dickson invariant. Pac. J. Math. 5, (1955); [21] Sur les multiplicateurs des similitudes. Rend. Circ. Mat. Palermo 3 (1955).

Edge, W. L.: [1] Geometry in three dimensions over GF (3). Proc. Roy. Soc. A (London) **222**, 262—286 (1953); [2] The geometry of the linear fractional group LF (4,2). Proc. Lond. Math. Soc. (3) **4**, 317—342 (1954); [3] The projective orthogonal and linear fractional representations of the simple group of order 360. Proc. Internat. Math. Congress, Amsterdam, Sept. 1954, vol. II.

Ehrlich, G.: [1] The structure of continuous rings. Diss. Univ. of Tennessee, Knoxville 1953.

Eichler, M.: [1] Idealtheorie der quadratischen Formen. Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. 18, 14—37 (1952); [2] Quadratische Formen und Orthogonale Gruppen. Berlin, J. Springer, 1952.

Freudenthal, H.: [1] Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie. Utrecht 1951; [2] Sur le groupe exceptionnel E_7. Indag. Math. **15**, 81—89 (1953); [3] Sur le groupe exceptionnel E_8. Indag. Math. **15**, 95—98 (1953).

Haantjes, J.: [1] Halblineare Transformationen. Math. Ann. **114**, 293—304 (1937).

Hasse, H.: [1] Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper. J. reine angew. Math. **153**, 113—130 (1924); [2] Äquivalenz quadratischer Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper. J. reine angew. Math. **153**, 158—162 (1924).

Hattori, A.: [1] On the multiplicative group of simple algebras and orthogonal groups of three dimensions. J. Math. Soc. Japan **4**, 205—217 (1952).

华罗庚：[1] Geometries of Matrices: I. Generalizations of von Staudt's theorem. Trans. Amer. Math. Soc. **57**, 441—481 (1945); [2] Geometries of Matrices: I_1. Arithmetical constructions. Trans. Amer. Math. Soc. **57**, 482—490 (1945); [3] On the extended space of several complex variables (1): The space of complex spheres. Quart. J. Math. **17**, 214—222 (1946); [4] Geometries of Matrices: III. Fundamental theorem in the geometry of symmetric matrices. Trans. Amer. Math. Soc. **61**, 229—255 (1947); [5] On the automorphisms of the symplectic group over any field. Ann. of Math. **49**, 739—759 (1948); [6] Geometry of symmetric matrices over any field with characteristic other than two. Ann. of Math. **50**, 8—31 (1949); [7] On the automorphisms of a sfield. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **35**, 386—389 (1949); [8] Some properties of a sfield. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **35**, 533—537 (1949); [9] Supplement to the paper of Dieudonné on the automorphisms of classical groups. Memoirs Amer. Math. Soc. n° 2, 96—122 (1951). [10] A generalization of Hamiltonian matrices. Acta Sci. Sinica 2, n° 1, 1—58 (1953).

华罗庚和 I. Reiner: [1] On the generators of the symplectic modular group. Trans. Amer. Math. Soc. **65**, 415—426 (1949); [2] Automorphisms of the unimodular group. Trans. Amer. Math. Soc. 71, 331—348 (1951); [3] Automorphisms of the projective unimodular group. Trans. Amer. Math. Soc. 72, 467—473 (1952).

华罗庚和万哲先: [1] On the automorphisms and isomorphisms of linear groups. J. Chinese Math. Soc. **2**, 1—32 (1953).

Iwasawa, K.: [1] Über die Einfachheit der speziellen projektiven Gruppen. Proc. Imp. Acad. Tokyo **17**, 57—59 (1941).

Ergebn. d. Mathem. N. F. H. 5, Dieudonné.

Jacobinski, H.: [1] Über die Automorphismen einer quadratischen Form. Kungl. Fysiogr. Sällsk. Lund Förh. **19**, n° 8 (1949).

Jacobson, N.: [1] Pseudo-linear transformations. Ann. of Math. **38**, 484—507 (1937); [2] Normal semi-linear transformations. Amer. J. Math. **61**, 45—58 (1939); [3] Theory of rings. Math. Surveys, n° 2. New York 1943.

Jordan, C.: [1] Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris: Gauthier-Villars 1870; [2] Sur les groupes linéaires (mod. p) à invariant quadratique. J. de Math. (7), **2**, 253—280 (1916).

Kaplansky, I.: [1] Forms in infinite-dimensional spaces. Anais Acad. Bras. Ci. **22**, 1—17 (1950). [2] Orthogonal similarity in infinite-dimensional spaces Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 16—25 1952; [3] Quadratic forms. J. Math. Soc. Japan **5**, 200—207 (1953) (cf. Math. Rev. **15**, 500 (1954)).

Kneser, M.: [1] Mémoire à paraître aux J. reine angew. Math. 196, 213—220 (1956); [2] Bestimmung des Zentrums der Cliffordschen Algebren einer quadratischen Form über einem Körper der Charakteristik 2. J. reine angew. Math. **193**, 123—125 (1954).

Landherr, W.: [1] Äquivalenz Hermitescher Formen über einem beliebigen algebraischen Zahlkörper. Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. **11**, 245—248 (1935).

Lipschitz, R.: [1] Untersuchungen über die Summen von Quadraten. Bonn 1886.

Mackey, W. G.: [1] Isomorphisms of normed linear spaces. Ann. of Math. **43**, 244—260 (1942).

Minkowski, H.: [1] Über die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen mit rationalen Koeffizienten rational einander transformiert werden können. J. reine angew. Math. **106**, 5—26 (1890) = Ges. Abh. **1**, 219 (1914).

Nakayama, T.: [1] Über die Klassifikation halblinearer Transformationen. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **19**, 99—107 (1937); [2] A note on the elementary divisor theory in non-commutative domains. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 719—723 (1938).

Ono, T.: [1] Arithmetic of Orthogonal Groups, J. Math. Soc. Japan **7**, 79—91 (1955).

Pall, G.: [1] Hermitian quadratic forms in a quasi-field. Bull. Amer. Math. Soc. **51**, 889—893 (1945).

Pickert, G.: [1] Elementare Behandlung des Helmholtzschen Raumproblems. Math. Ann. **120**, 492—501 (1948).

Rickart, C. E.: [1] Isomorphic groups of linear transformations. Amer. J. Math. **72**, 451—464 (1950); [2] Isomorphic groups of linear transformations. II. Amer. J. Math. **73**, 697—716 (1951). [3] Isomorphisms of infinite-dimensional analogues of the classical groups. Bull. Amer. Math. Soc. **57**, 435—448 (1951).

Scherk, P.: [1] On the decomposition of orthogonalities into symmetries. Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 481—491 (1950).

Schmidt, A.: [1] Über die Bewegungsgruppe der ebenen elliptischen Geometrie. J. reine angew. Math. **186**, 230—240 (1949).

Schreier, O., u. B. L. van der Waerden: [1] Die Automorphismen der projektiven Gruppen. Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. **6**, 303—322 (1928).

Schwerdtfeger, H.: [1] Skew-symmetric matrices and projective geometry. Amer. Math. Monthly **51**, 137—148 (1944); [2] Symplectic groups and null systems. Courant anniversary volume 1948, 371—382.

de Séguier, J. A.: [1] Sur les groupes à invariant bilinéaire ou quadratique dans un champ de Galois. J. de Math. (7), **2**, 281—366 (1916); [2] Les substitutions

d'ordre 2 des groupes linéaire, hermitien, gauche et quadratique dans un champ de Galois, I. Ann. Ecol. Norm. Sup. **50**, 217—243 (1933); II. **51**, 79—140 (1934).

Shoda, K.: [1] Einige Sätze über Matrizen. Jap. J. Math. **13**, 361—365 (1937); [2] Über den Kommutator der Matrizen, J. Math. Soc. Japan **3**, 78—81 (1951).

Springer, T.: [1] Over symplectische Transformaties. Diss. Univ. Leiden 1951. [2] Sur les formes quadratiques d'indice zéro. C. r. Acad. Sci. (Paris) **234**, 1517—1519 (1952).

Tits, J.: [1] Généralisations des groupes projectifs. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci. **35**, 197—208, 224—233, 568—589, 756—773 (1949); [2] Généralisations des groupes projectifs basées sur leurs propriétés de transitivité. Acad. roy. Belgique. Mém. Cl. Sci. 27, fasc. 2, (1952). [3] Le plan projectif des octaves et les groupes de Lie exceptionnels. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci. **39**, 309—329 (1953).

Toyama, H.: [1] On commutators of matrices. Kodai Math. Sem. Rep. n° 5—6 (1949).

Veblen, O., and J. W. Young: [1] Projective geometry. 2 vol., 2nd ed. Boston 1918—1938.

van der Waerden, B. L.: [1] Gruppen von linearen Transformationen. Berlin: Julius Springer 1935.

Walter, J. H.: [1] Automorphisms of the projective unitary groups. Diss. Univ. Michigan, Ann Arbor 1954.

Witt, E.: [1] Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. J. reine angew. Math. **176**, 31—44 (1937). [2] Über eine Invariante quadratischer Formen mod. 2. J. reine angew. Math. **193**, 119—120 (1954).

Witt, E., u. W. Klingenberg: [1] Über die Arfsche Invariante quadratischer Formen mod. 2. J. reine angew. Math. **193**, 121—122 (1954).